MATEMÁTICA

1 d

Um mapa está numa escala 1:20 000 000, o que significa que uma distância de uma unidade, no mapa, corresponde a uma distância real de 20 000 000 de unidades. Se no mapa a distância entre duas cidades é de 2 cm , então a distância real entre elas é de:

a) 2400 km b) 2400000 cm c) 400000 cm
d) 400 km e) 40000 m

Resolução

Se o mapa está na escala de 1:20 000 000 então a distância de 2cm entre duas cidades corresponde a uma distância real de 40 000 000 cm, ou seja, 400 km.

2 b

O valor de $\dfrac{x^4 - y^4}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3}$ para x = 111 e y = 112 é:

a) 215 b) 223 c) 1 d) –1 e) 214

Resolução

$$\frac{x^4 - y^4}{x^3 - x^2y + xy^2 - y^3} = \frac{(x^2 + y^2) \,.\, (x + y) \,.\, (x - y)}{(x^2 + y^2) \,.\, (x - y)} =$$

$= x + y.$

Assim, para $x = 111$ *e* $y = 112$ *teremos* $x + y = 223$.

3 d

Paula digita uma apostila em 2 horas, enquanto Ana o faz em 3 horas. Se Paula iniciar o trabalho, digitando nos primeiros 50 minutos, o tempo necessário para Ana terminar a digitação da apostila é:

a) 120 minutos b) 90 minutos c) 95 minutos
d) 105 minutos e) 110 minutos

Resolução

Seja T o trabalho de digitar a apostila, e ***x*** *o tempo, em minutos, necessário para Ana terminar a digitação iniciada por Paula. Tem-se que:*

Paula digita T em 2 horas e portanto $\dfrac{T}{120}$ *por minuto.*

Ana digita T em 3 horas e portanto $\dfrac{T}{180}$ *por minuto.*

Assim sendo, $\dfrac{T}{120} \,.\, 50 + \dfrac{T}{180} \,.\, x = T \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 150\,T + 2T\,x = 360\,T \Leftrightarrow x = 105$, *pois* $T \neq 0$.

4 d

Num grupo de 400 pessoas, 70% são não-fumantes.

O número de fumantes que devemos retirar do grupo, para que 80% das pessoas restantes sejam não-fumantes, é:

a) 35 b) 40 c) 45 d) 50 e) 55

Resolução

I) O número de não-fumantes do grupo inicial é de 70% de 400 pessoas = 280 pessoas.

*II) Seja **x** o número de fumantes que devemos retirar deste grupo. Para que o número de não-fumantes passe a ser de 80% das pessoas restantes, devemos ter:*

$$280 = 80\%\,(400 - x) \Leftrightarrow x = 50$$

5 a

Se $x > 1$ e $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$, então $f(f(x+1))$ é igual a:

a) $x + 1$ b) $\dfrac{1}{x-1}$

c) $x - 1$ d) $\dfrac{x}{x-1}$

e) $\dfrac{x+1}{x-1}$

Resolução

Sendo $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ *e* $x > 1$, *temos:*

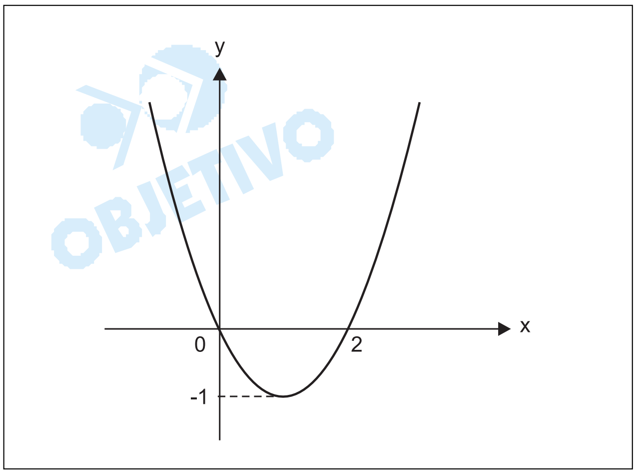
$$I)\ f(x+1) = \frac{x+1}{x+1-1} = \frac{x+1}{x}$$

$$II)\ f(f(x+1)) = \frac{\dfrac{x+1}{x}}{\dfrac{x+1}{x} - 1} = \frac{\dfrac{x+1}{x}}{\dfrac{x+1-x}{x}} = x + 1$$

6 e

A figura mostra o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo -1 o seu mínimo. Se $g(x) = 3x - f(x)$, então $f(3) + g(2)$ vale:

a) –6 b) 2 c) –3 d) 6 e) 9



Resolução

A partir do gráfico do enunciado concluímos que $f(x) = a \,.\, (x - 0) \,.\, (x - 2)$ e sendo -1 o seu mínimo temos: $f(1) = a \,.\, (1) \,.\, (-1) = -1 \Leftrightarrow a = 1$

Logo: $f(x) = 1 \,.\, x \,.\, (x - 2) = x^2 - 2x$

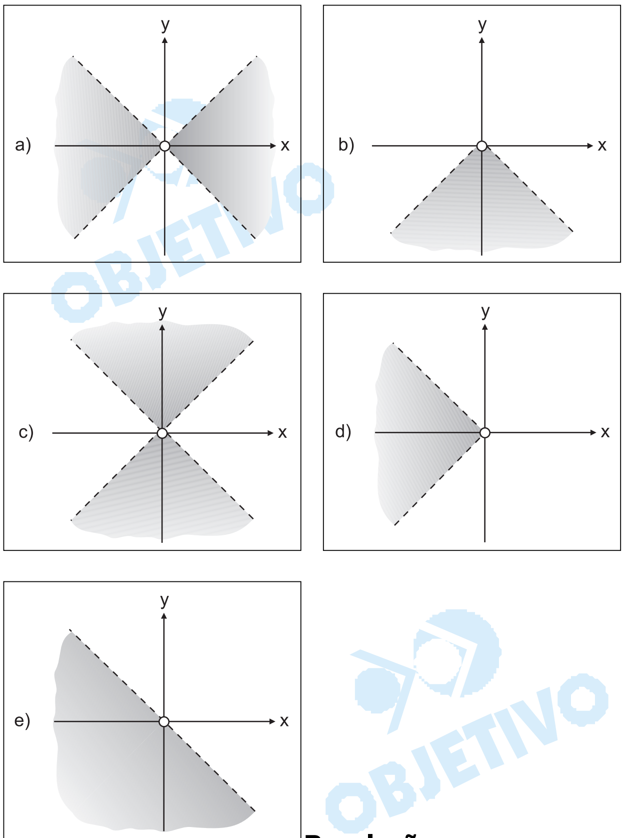
Como $g(x) = 3x - f(x) = 3x - (x^2 - 2x)$

$g(x) = -x^2 + 5x$

Portanto: $f(3) + g(2) = (3^2 - 2 \,.\, 3) + (-2^2 + 5 \,.\, 2) = 9$

7 c

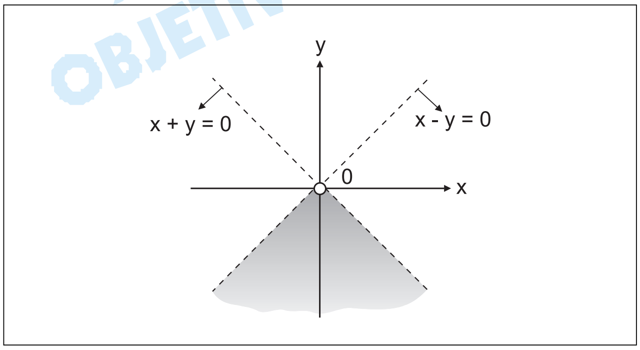
A melhor representação gráfica dos pontos (x, y) do plano, tais que $(x - y) \,.\, (x + y) < 0$, é a parte sombreada da alternativa:



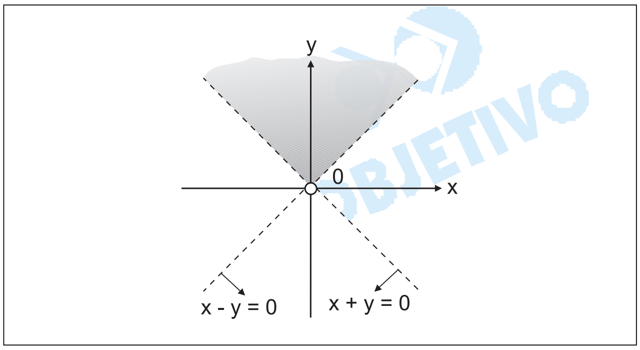
Resolução

$$(x - y)(x + y) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x - y > 0 \ \ e \ \ x + y < 0 \quad (I) \\ ou \\ x - y < 0 \ \ e \ \ x + y > 0 \quad (II) \end{cases}$$

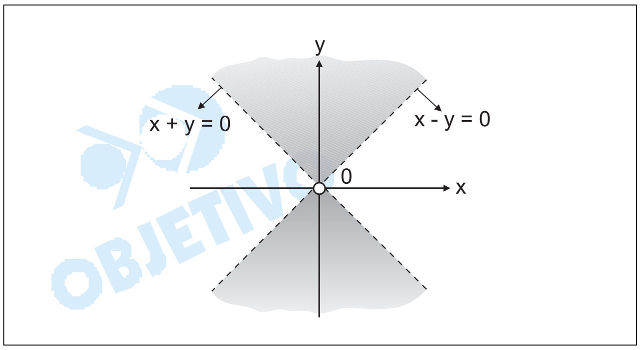
As soluções do sistema (I) são representadas por:



As soluções do sistema (II) são representadas por:



Então, as soluções da inequação dada são representadas por:



8 a

Se $2^x = 4^{y+1}$ e $27^y = 3^{x-9}$, então y – x vale:

a) 5 b) 4 c) 2 d) –3 e) –1

Resolução

$$\begin{cases} 2^x = 4^{y+1} \\ 27^y = 3^{x-9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 2^{2y+2} \\ 3^{3y} = 3^{x-9} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = 2y + 2 \\ 3y = x - 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -12 \\ y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow$$

Logo: y – x = 5

9 e

Se $\log_m 5 = a$ e $\log_m 3 = b$, $0 < m \neq 1$, então $\log_{\frac{1}{m}} \frac{3}{5}$ é igual a:

a) $\frac{b}{a}$ b) $b - a$ c) $3a - 5b$

d) $\frac{a}{b}$ e) $a - b$

Resolução

Se $\log_m 5 = a$ *e* $\log_m 3 = b$, $0 < m \neq 1$,

$$\text{então } \log_{\frac{1}{m}} \frac{3}{5} = \frac{\log_m \frac{3}{5}}{\log_m \frac{1}{m}} = \frac{\log_m 3 - \log_m 5}{-1} =$$

$$= \frac{b - a}{-1} = a - b$$

10 c

Na igualdade $\log_b x = \frac{2}{3} \log_b 27 + 2 \log_b 2 - \log_b 3$, x vale:

a) 27 b) 9 c) 12 d) 6 e) 3

Resolução

$$\log_b x = \frac{2}{3} \cdot \log_b 27 + 2\log_b 2 - \log_b 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_b x = \log_b (3^3)^{\frac{2}{3}} + \log_b 2^2 - \log_b 3 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_b x = \log_b \left(\frac{9 \cdot 4}{3} \right) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_b x = \log_b 12 \Leftrightarrow x = 12$$

11 c

Os comprimentos de uma seqüência de circunferências estão em progressão aritmética de razão 2. Os raios dessas circunferências definem uma:

a) progressão aritmética de razão π

b) progressão aritmética de razão 2

c) progressão aritmética de razão $\frac{1}{\pi}$

d) progressão geométrica de razão $\frac{1}{\pi}$

e) progressão geométrica de razão $\dfrac{1}{2\pi}$

Resolução

Seja $(C_n) = (2\pi\, r_1;\ 2\pi\, r_2;\ \dots;\ 2\pi\, r_n;\ 2\pi\, r_{n+1};\ \dots)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, a seqüência dos comprimentos das circunferências de raios $r_1;\ r_2;\ \dots;\ r_n;\ r_{n+1};\ \dots$ respectivamente.

Como (C_n) é uma progressão aritmética de razão 2, temos:

$2\pi\, r_{n+1} - 2\pi\, r_n = 2 \Leftrightarrow r_{n+1} - r_n = \dfrac{1}{\pi}$ (constante) e portanto a seqüência $(r_n) = (r_1;\ r_2;\ \dots.)$ dos raios é uma progressão aritmética do razão $\dfrac{1}{\pi}$.

12 d

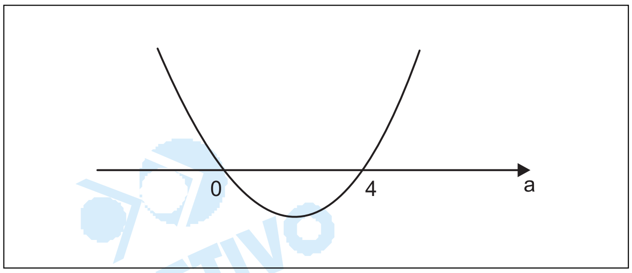
Se $P(x) = x^3 + ax^2 + ax$, $a \neq 0$, tem apenas uma raiz real, então o resto R da divisão de P (x) por $x - 2$ é tal que:

a) $-2 < R < 2$
b) $0 < R < 24$
c) $12 < R < 48$
d) $8 < R < 32$
e) $-32 < R < 12$

Resolução

I) Se $P(x) = x^3 + ax^2 + ax$, $a \neq 0$, admite uma única raiz real, que é $x = 0$, então $x^2 + ax + a = 0$ deve ter raízes complexas e portanto $\Delta < 0$.

$\Delta = a^2 - 4a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 4$ pois o gráfico de Δ, é:



II) Sendo R o resto da divisão de P(x) por $x - 2$ então
$R = P(2) = 6a + 8$
Dos itens (I) e (II), tem-se que: $8 < R < 32$

13 a

Para $0 < x < 2\pi$, a soma das raízes da equação $\sec^2 x = \operatorname{tg} x + 1$ é igual a :

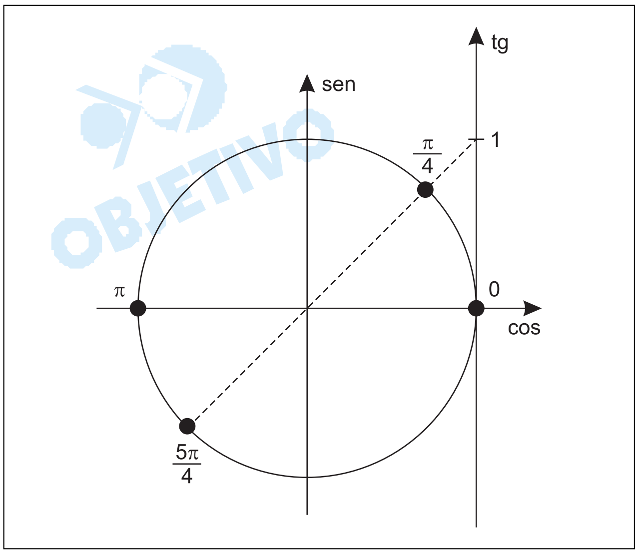
a) $\dfrac{5\pi}{2}$ b) $\dfrac{7\pi}{2}$ c) $\dfrac{9\pi}{2}$ d) 2π e) 4π

Resolução

$$\left.\begin{array}{l} \sec^2 x = \operatorname{tg} x + 1 \\ \sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \end{array}\right\} \Rightarrow \operatorname{tg}^2 x - \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 0$ ou $\operatorname{tg} x = 1$

No ciclo trigonométrico, tem-se:



Para $0 < x < 2\pi$:

$$V = \left\{ \frac{\pi}{4}, \pi, \frac{5\pi}{4} \right\}$$

A soma das raízes da equação dada é

$$V = \frac{\pi}{4} + \pi + \frac{5\pi}{4} = \frac{5\pi}{2}$$

14 e

Se $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}^2\,x$, então x pode ser:

a) $\frac{\pi}{2}$ b) $\frac{\pi}{4}$ c) $\frac{2\pi}{3}$ d) $\frac{3\pi}{4}$ e) $\frac{3\pi}{2}$

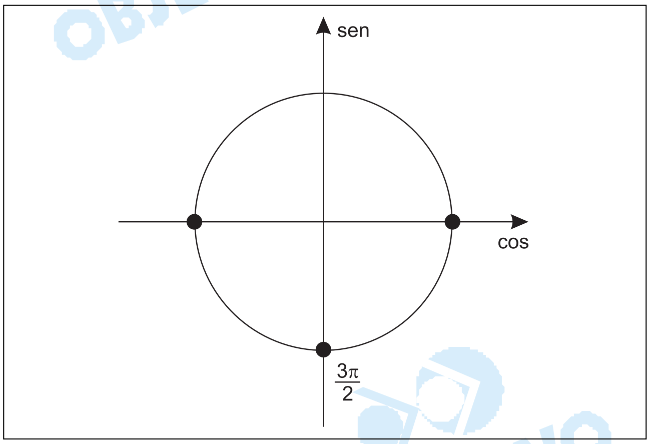
Resolução

Como $\cos(x + \pi/2) = \cos x \,.\, \cos \pi/2 - \text{sen}\, x \,.\, \text{sen}\, \pi/2 =$
$= -\text{sen}\, x$ *então:*

$\cos(x + \pi/2) = \text{sen}^2 x \Leftrightarrow -\text{sen}\, x = \text{sen}^2 x \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \text{sen}^2 x + \text{sen}\, x = 0 \Leftrightarrow \text{sen}\, x = 0$ *ou* $\text{sen}\, x = -1$

No ciclo, tem-se:



Um possível valor de x é $\frac{3\pi}{2}$.

15 b

O sistema $\begin{cases} mx + y = 0 \\ x + my = 0 \end{cases}$

a) é impossível, se m = 0

b) tem mais de uma solução, se m = –1

c) tem solução única, se m = 1

d) admite apenas solução nula, qualquer que seja m

e) admite mais de uma solução, qualquer que seja $m \neq \frac{1}{2}$

Resolução

Como o sistema

$\begin{cases} mx + y = 0 \\ x + my = 0 \end{cases}$

é homogêneo, teremos:

I) Sistema possível e determinado $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 \neq 0 \Leftrightarrow m \neq 1 \text{ e } m \neq -1$$

II) Sistema possível e indeterminado $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} m & 1 \\ 1 & m \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow m^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ ou } m = -1$$

Portanto, o sistema tem mais de uma solução, se m = –1.

16 b

Considere a seqüência (2 , 3 , ..., 37), de números primos maiores que 1 e menores que 40. Escolhidos ao acaso dois deles, a probabilidade de serem ímpares consecutivos é:

a) $\frac{1}{12}$ b) $\frac{5}{66}$ c) $\frac{2}{33}$ d) $\frac{1}{33}$ e) $\frac{4}{33}$

Resolução

A seqüência dos números primos, entre 1 e 40, é:

B = {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37}

Existem 5 pares de dois primos ímpares consecutivos em B:

(3; 5), (5; 7), (11; 13), (17; 19) e (29; 31)

Existem $C_{12,2} = 66$ *duplas de elementos de B*

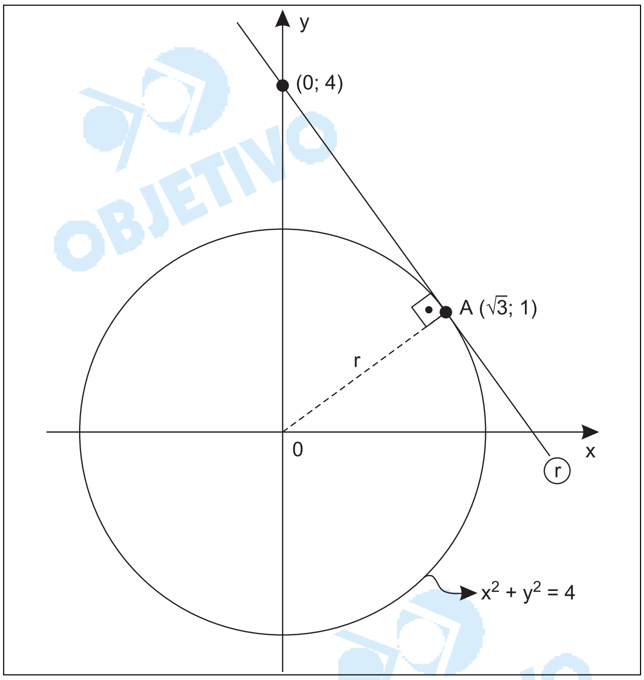
Então a probabilidade procurada é $P = \frac{5}{66}$

17 a

Considere a reta r que passa pelo ponto $(\sqrt{3}, 1)$ e é tangente à circunferência de centro na origem e raio 2. A reta r encontra o eixo vertical num ponto de ordenada:

a) 4 b) 3 c) $\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{3}$ e) $3\sqrt{2}$

Resolução



O ponto A $(\sqrt{3}\,;1)$ *pertence à circunferência* $x^2 + y^2 = 4$.

Como $m_{\overleftrightarrow{OA}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ *e* $\overleftrightarrow{OA} \perp r$,

então $m_r = -\sqrt{3}$

*A equação de **r** é:*

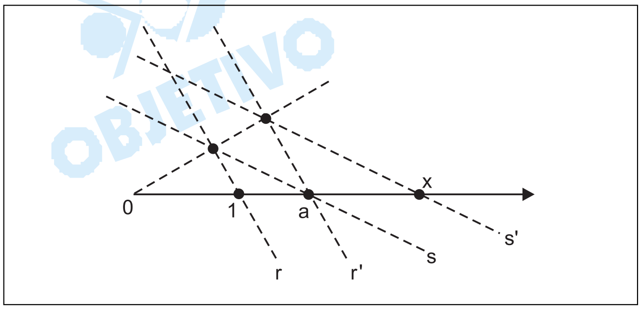
$y - 1 = -\sqrt{3}\,(x - \sqrt{3}\,) \Leftrightarrow y = -\sqrt{3}\,x + 4$

Para $x = 0$ *tem-se* $y = 4$

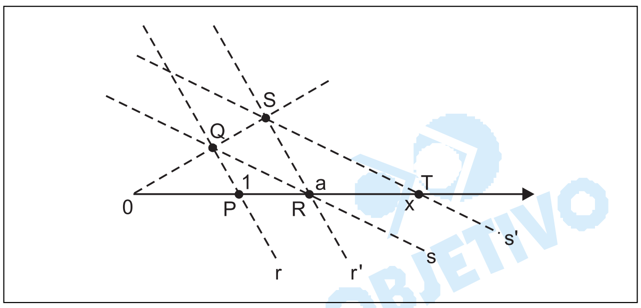
18 b

Na figura temos r//r' e s//s'. Então, para todo a >1, o valor da abscissa x é:

a) 2a b) a^2 c) $(a + 1)^2$ d) a + 1 e) $\sqrt{a} + 1$



Resolução



De r // r' tem-se a semelhança dos triângulos OPQ e

ORS, e portanto $\dfrac{OP}{OR} = \dfrac{OQ}{OS}$ *(I)*

De s // s' tem-se a semelhança dos triângulos OQR e OST, e portanto $\dfrac{OQ}{OS} = \dfrac{OR}{OT}$ *(II)*

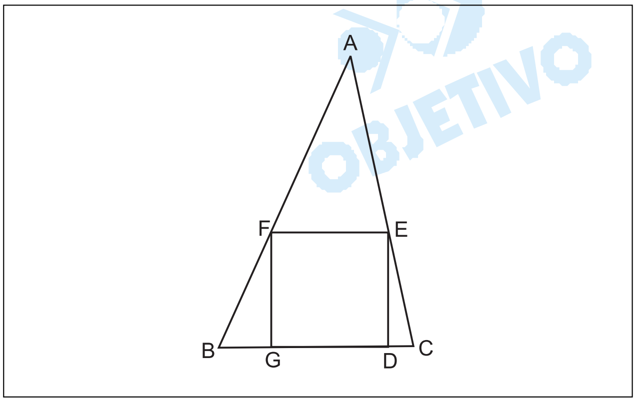
Das proporções (I) e (II) tem-se

$\dfrac{OP}{OR} = \dfrac{OR}{OT} \Leftrightarrow \dfrac{1}{a} = \dfrac{a}{x} \Leftrightarrow x = a^2$, *pois* $a > 1$

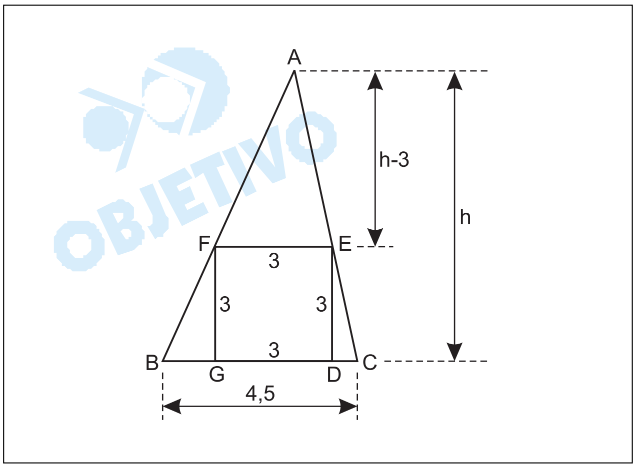
19 d

No triângulo ABC da figura, o lado BC mede 4,5 e o lado do quadrado DEFG mede 3. A altura do triângulo ABC , em relação ao lado BC , mede:

a) 7,5 b) 8,0 c) 8,5 d) 9,0 e) 9,5



Resolução



Seja h a altura do triângulo ABC, em relação ao lado $\overline{BC}$*.*
Os triângulos ABC e AFE são semelhantes pois o ângulo $\hat{A}$ *é comum e* $A\hat{F}E \cong A\hat{B}C$ *.*
Assim,

$$\frac{h-3}{h} = \frac{3}{4{,}5} \Leftrightarrow 4{,}5h - 13{,}5 = 3h \Leftrightarrow$$

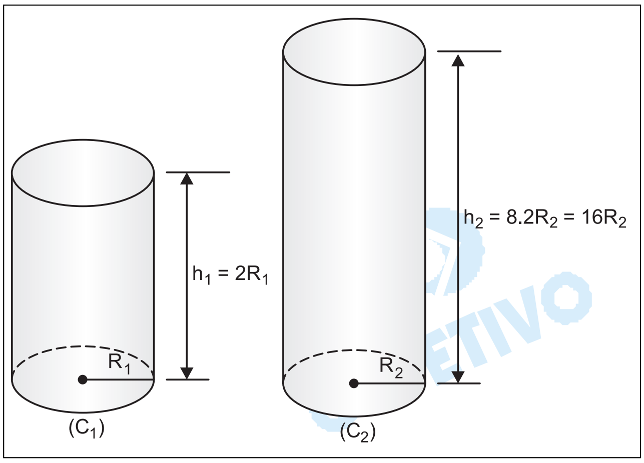
$$\Leftrightarrow 1{,}5h = 13{,}5 \Leftrightarrow h = 9{,}0$$

20 e

Um cilindro reto C_1 tem altura igual ao diâmetro da base e um cilindro C_2, também reto, tem altura igual a oito vezes o diâmetro da base. Se a razão entre os volumes de C_1 e de C_2 é $\frac{1}{27}$, então a razão entre os respectivos raios é:

a) $\frac{1}{9}$ b) $\frac{2}{27}$ c) $\frac{1}{27}$ d) $\frac{1}{3}$ e) $\frac{2}{3}$

Resolução



Sejam V_1 e V_2 os volumes dos cilindros C_1 e C_2 respectivamente. Do enunciado, temos:

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \frac{\pi\,(R_1)^2\,.\,h_1}{\pi\,(R_2)^2\,.\,h_2} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(R_1)^2\,.\,2R_1}{(R_2)^2\,.\,16R_2} = \frac{1}{27} \Leftrightarrow \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^3 = \frac{8}{27} \Leftrightarrow \frac{R_1}{R_2} = \frac{2}{3}$$