MATEMÁTICA

1

Caminhando sempre com a mesma velocidade, a partir do marco zero, em uma pista circular, um pedestre chega à marca dos 2 500 metros às 8 horas, e aos 4 000 metros às 8h15min.

a) A que horas e minutos o referido pedestre começou a caminhar?

b) Quantos metros tem a pista se o pedestre deu duas voltas completas em 1 hora e 40 minutos?

Resolução

Em 15 minutos (das 8h às 8h15min), o pedestre percorreu 1 500 metros (4 000m – 2 500m). Sua velocidade média é, portanto, de 100 metros por minuto.

a) Para percorrer 2500 metros até às 8 horas, o pedestre gastou $\frac{2500}{100} = 25$ *minutos. Então ele começou a caminhar às 7h35min.*

b) Em 100 minutos (1 hora e 40 minutos), o pedestre deu duas voltas completas na pista, que tem

$$\frac{(100min)\ .\ (100\ m/min)}{2} = 5000 \text{ metros}$$

Respostas: a) 7h35min

b) 5000 metros

2

Em uma empresa, 1/3 dos funcionários tem idade menor que 30 anos, 1/4 tem idade entre 30 e 40 anos e 40 funcionários têm mais de 40 anos?

a) Quantos funcionários tem a referida empresa?

b) Quantos deles têm pelo menos 30 anos?

Resolução

a) Se x é o número de funcionários da empresa, então

$$\frac{1}{3}x + \frac{1}{4}x + 40 = x \Leftrightarrow \frac{5}{12}x = 40 \Leftrightarrow x = 96$$

b) Desses funcionários, têm pelo menos 30 anos

$$96 - \frac{1}{3}\ .\ 96 = 64.$$

Respostas: a) 96 funcionários

b) 64 funcionários têm pelo menos 30 anos.

3

Uma sala retangular medindo 3m por 4,25m deve ser ladrilhada com ladrilhos quadrados iguais. Supondo que não haja espaço entre ladrilhos vizinhos, pergunta-se:

a) Qual deve ser a dimensão máxima, em centímetros, de cada um desses ladrilhos para que a sala possa ser ladrilhada sem cortar nenhum ladrilho?

b) Quantos desses mesmos ladrilhos são necessários?

Resolução

a) Nas condições do problema, a dimensão máxima, em centímetros, de cada um dos ladrilhos, é o

$$mdc\ (425,\ 300) = 25$$

b) O total de ladrilhos necessários é

$$\frac{300}{25} \cdot \frac{425}{25} = 12 \cdot 17 = 204$$

Respostas: a) 25 cm
b) 204 ladrilhos

4

Uma transportadora entrega, com caminhões, 60 toneladas de açúcar por dia. Devido a problemas operacionais, em um certo dia cada caminhão foi carregado com 500kg a menos que o usual, tendo sido necessário, naquele dia, alugar mais 4 caminhões.

a) Quantos caminhões foram necessários naquele dia?

b) Quantos quilos transportou cada caminhão naquele dia?

Resolução

a) Se $x > 0$ é o número de caminhões, no dia em que houve problemas operacionais, então

$$\frac{60\,000}{x-4} - 500 = \frac{60\,000}{x} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 600x = 600\,(x-4) + 5x\,(x-4) \Leftrightarrow$$

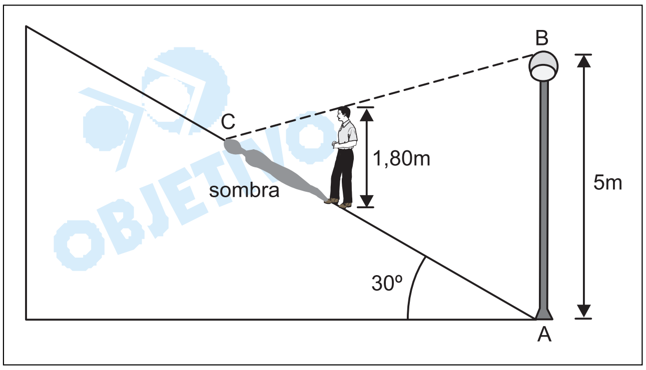
$$\Leftrightarrow x^2 - 4x - 480 = 0 \Leftrightarrow x = 24$$

b) Cada caminhão foi carregado com $\dfrac{60\,000}{24} = 2\,500$kg

Respostas: a) 24 caminhões
b) 2 500kg

5

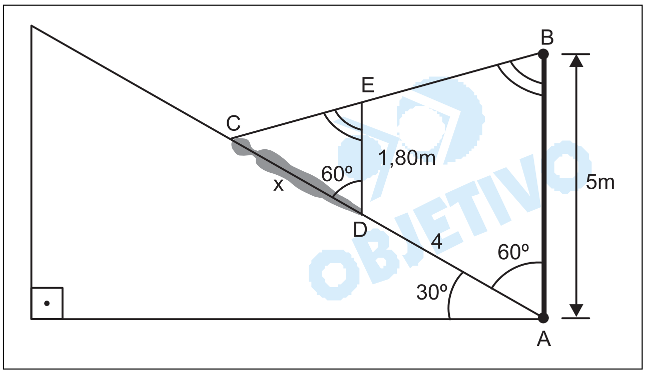
Um homem, de 1,80m de altura, sobe uma ladeira com inclinação de 30°, conforme mostra a figura. No ponto A está um poste vertical de 5 metros de altura, com uma lâmpada no ponto B. Pede-se para:



a) Calcular o comprimento da sombra do homem depois que ele subiu 4 metros ladeira acima.

b) Calcular a área do triângulo ABC.

Resolução



Sendo x o comprimento da sombra do homem, em metros, depois que ele subiu 4 metros ladeira acima, e S a área, em metros quadrados, do triângulo ABC, tem-se:

a) Os triângulos ABC e DEC são semelhantes pelo critério (AA~).

$$\text{Assim: } \frac{AC}{DC} = \frac{AB}{DE} \Leftrightarrow \frac{4+x}{x} = \frac{5}{1,80} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{4+x}{x} = \frac{25}{9} \Leftrightarrow 16x = 36 \Leftrightarrow x = \frac{36}{16} \Leftrightarrow x = 2,25$$

$$b)\ S = \frac{AB\ .\ AC\ .\ \text{sen } 60°}{2}$$

$$\text{Assim: } S = \frac{5\ .\ (4 + 2,25)\ .\ \sqrt{3}}{4} = S = \frac{125\sqrt{3}}{16}$$

Respostas: a) 2,25 m b) $\dfrac{125\sqrt{3}}{16}$ m²

6

Em Matemática, um número natural *a* é chamado *palíndromo* se seus algarismos, escritos em ordem inversa, produzem o mesmo número. Por exemplo, 8, 22 e 373 são palíndromos. Pergunta-se:

a) Quantos números naturais palíndromos existem entre 1 e 9 999?

b) Escolhendo-se ao acaso um número natural entre 1 e 9 999, qual é a probabilidade de que esse número seja palíndromo? Tal probabilidade é maior ou menor que 2%? Justifique sua resposta.

Resolução

a) Considerando a frase "existem entre 1 e 9 999" como "existem entre 1 e 9 999, inclusive 1 e 9 999", tem-se:

1) 9 "palíndromos" com um algarismo;
2) 9 . 1 = 9 "palíndromos" com dois algarismos;
3) 9 . 10 . 1 = 90 "palíndromos" com três algarismos;
4) 9 . 10 . 1 . 1 = 90 "palíndromos" com quatro algarismos;

portanto, existem (9 + 9 + 90 + 90) = 198 "palíndromos" entre 1 e 9 999.

b) A probabilidade de um número natural escolhido entre 1 e 9 999, inclusive 1 e 9 999, ser "palíndromo" é

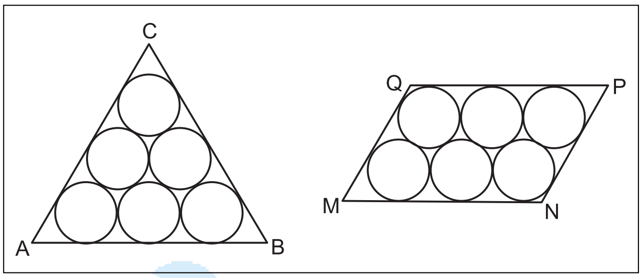
$$\frac{198}{9\,999} = \frac{2}{101} < \frac{2}{100} = 2\%$$

Respostas: a) 198 "palíndromos"

b) $\frac{2}{101}$, menor que 2%

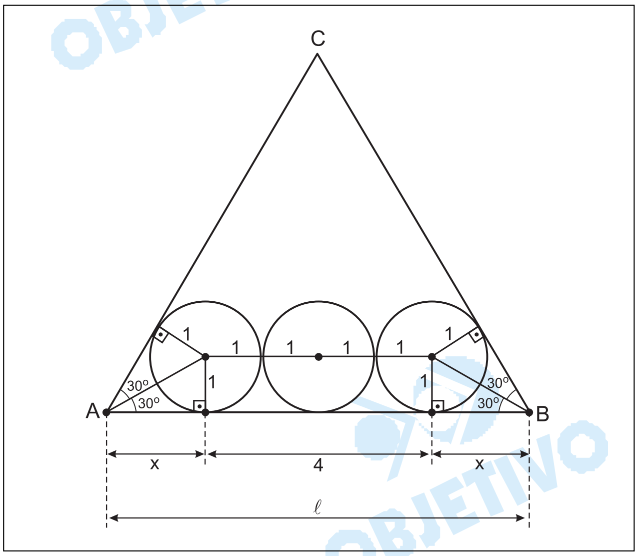
7

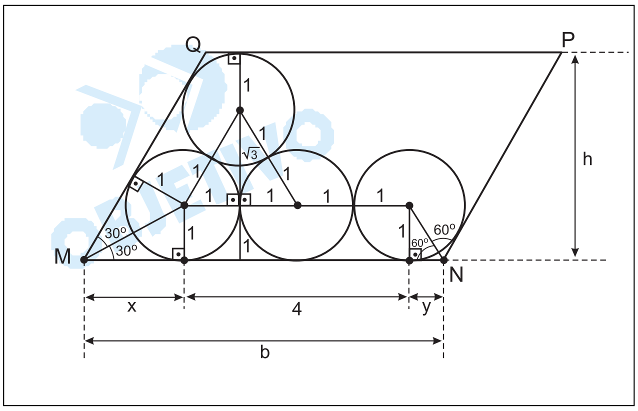
Seis círculos, todos de raio 1 cm, são dispostos no plano conforme mostram as figuras ao lado:



a) Calcule a área do triângulo ABC.
b) Calcule a área do paralelogramo MNPQ e compare-a com a área do triângulo ABC.

Resolução





*Sendo S_t a área, em centímetros quadrados, do triângulo eqüilátero ABC de lado ℓ (em centímetros), e S_p a área, em centímetros quadrados, do paralelogramo MNPQ de base **b** e altura **h**, também medidos em centímetros, de acordo com as figuras acima, tem-se:*

1º) $\text{tg } 30° = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{3}}{3} = \dfrac{1}{x} \Leftrightarrow x = \sqrt{3}$

2º) $\text{tg } 60° = \dfrac{1}{y} \Leftrightarrow \sqrt{3} = \dfrac{1}{y} \Leftrightarrow y = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

3º) $\ell = 4 + 2x \Leftrightarrow \ell = 4 + 2\sqrt{3}$

4º) $b = 4 + x + y \Leftrightarrow b = 4 + \sqrt{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow b = \dfrac{12 + 4\sqrt{3}}{3}$

5º) $h = 1 + \sqrt{3} + 1 \Leftrightarrow h = 2 + \sqrt{3}$

Assim:

a) $S_t = \dfrac{\ell^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow S_t = \dfrac{(4 + 2\sqrt{3})^2\sqrt{3}}{4} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_t = 12 + 7\sqrt{3}$

b) $S_p = b \cdot h \Leftrightarrow S_p = \left(\dfrac{12 + 4\sqrt{3}}{3}\right) \cdot (2 + \sqrt{3}) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_p = 12 + \dfrac{20\sqrt{3}}{3}$

e como $7 > \dfrac{20}{3}$, então: $12 + 7\sqrt{3} > 12 + \dfrac{20\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow S_t > S_p$

Respostas: a) $(12 + 7\sqrt{3})\text{cm}^2$

b) a área do paralelogramo MNPQ é de $\left(12 + \dfrac{20\sqrt{3}}{3}\right)\text{cm}^2$ e, portanto, é menor que a área do triângulo ABC.

8

Uma piscina, cuja capacidade é de $120m^3$, leva 20 horas para ser esvaziada. O volume de água na piscina, t horas após o início do processo de esvaziamento, é dado pela função $V(t) = a\,(b - t)^2$ para $0 \le t \le 20$ e $V(t) = 0$ para $t \ge 20$.

a) Calcule as constantes a e b.

b) Faça o gráfico da função $V(t)$ para $t \in [0,30]$.

Resolução

Se a piscina de volume $120m^3$ leva 20 horas para ser esvaziada, então

$$\begin{cases} V(20) = 0 = a\,.\,(b - 20)^2 \\ V(0) = 120 = a\,.\,(b - 0)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} b = 20, \text{ pois } a \ne 0 \\ a\,.\,b^2 = 120 \end{cases} \Rightarrow$$

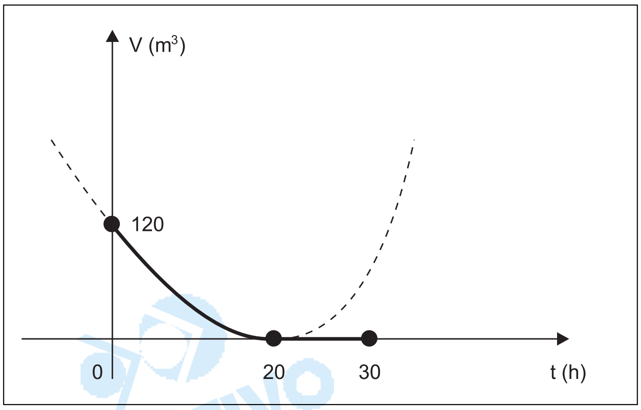
$$\Rightarrow \begin{cases} a = 0{,}3 \\ b = 20 \end{cases}$$

O volume de água na piscina, t horas após o início do processo de esvaziamento, é dado pela função

$$V(t) = 0{,}3\,(20 - t)^2 \text{ para } 0 \le t \le 20 \text{ e } V(t) = 0$$

para $t \ge 20$.

O gráfico da função é



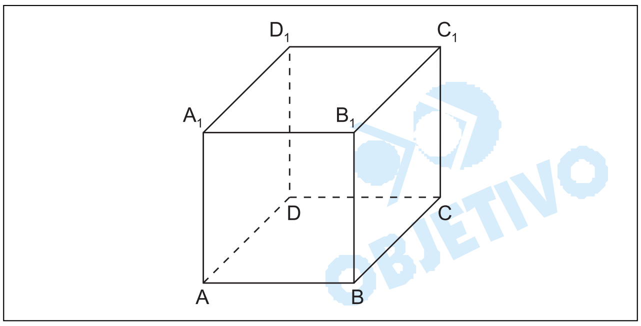
Respostas: a) a = 0,3 e b = 20 b) Gráfico

9

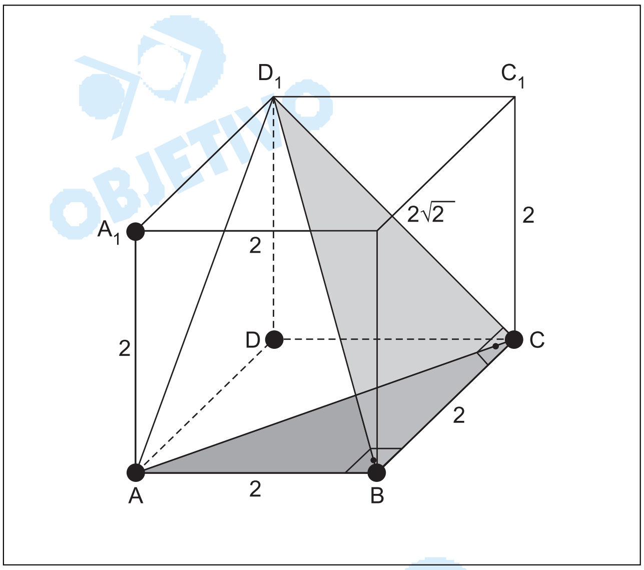
O sólido da figura ao lado é um cubo cuja aresta mede 2cm.

a) Calcule o volume da pirâmide $ABCD_1$.

b) Calcule a distância do vértice A ao plano que passa pelos pontos B, C e D_1.



Resolução



Sejam
V o volume, em centímetros cúbicos, da pirâmide $ABCD_1$;
S a área, em centímetros quadrados, do triângulo retângulo BAC;
S' a área, em centímetros quadrados, do triângulo retângulo CBD_1;
d a distância, em centímetros, do ponto A ao plano determinado pelos pontos B, C e D_1.

a) $V = \dfrac{1}{3} \cdot S \cdot DD_1 \Leftrightarrow V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{AB \cdot BC}{2} \cdot DD_1$

Assim, $V = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2 \cdot 2}{2} \cdot 2 \Leftrightarrow V = \dfrac{4}{3}$

b) $V = \dfrac{1}{3} \cdot S' \cdot d$

Assim, $\dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{3} \cdot \dfrac{2 \cdot 2\sqrt{2}}{2} \cdot d \Leftrightarrow d = \sqrt{2}$

Respostas: a) $\boldsymbol{\dfrac{4}{3}}$ ***cm³***

b) $\boldsymbol{\sqrt{2}}$ ***cm***

10

Considere o sistema linear abaixo, no qual *a* é um parâmetro real:

$$\begin{cases} ax + y + z = 1 \\ x + ay + z = 2 \\ x + y + az = -3 \end{cases}$$

a) Mostre que para *a* = 1 o sistema é impossível.
b) Encontre os valores do parâmetro *a* para os quais o

sistema tem solução única.

Resolução

Para a = 1 o sistema linear é impossível pois se reduz a um sistema de 3 equações imcompatíveis.

$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + y + z = 2 \\ x + y + z = -3 \end{cases}$$

Para que o sistema linear tenha solução única, pelo teorema de Cramer,

$$D = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow a^3 - 3a + 2 \neq 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (a - 1)(a^2 + a - 2) \neq 0 \Rightarrow a \neq 1 \text{ e } a \neq -2$$

Respostas:

a) x + y + z = 1 e x + y + z = 2 são equações incompatíveis.

b) $\forall$ ***a*** $\in \mathbb{R}$***, tal que a*** $\neq$ ***1 e a*** $\neq$ ***2***

11

Considere a equação $2^x + m\,2^{2-x} - 2m - 2 = 0$, onde m é um número real.

a) Resolva essa equação para $m = 1$.

b) Encontre todos os valores de m para os quais a equação tem uma única raiz real.

Resolução

a) Para m = 1 a equação resulta

$$2^x + 2^{2-x} - 4 = 0 \Leftrightarrow 2^x + \frac{4}{2^x} - 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 - 4 \,.\, (2^x) + 4 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2^x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1 \Leftrightarrow V = \{1\}$$

b) $2^x + m \,.\, 2^{2-x} - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow$

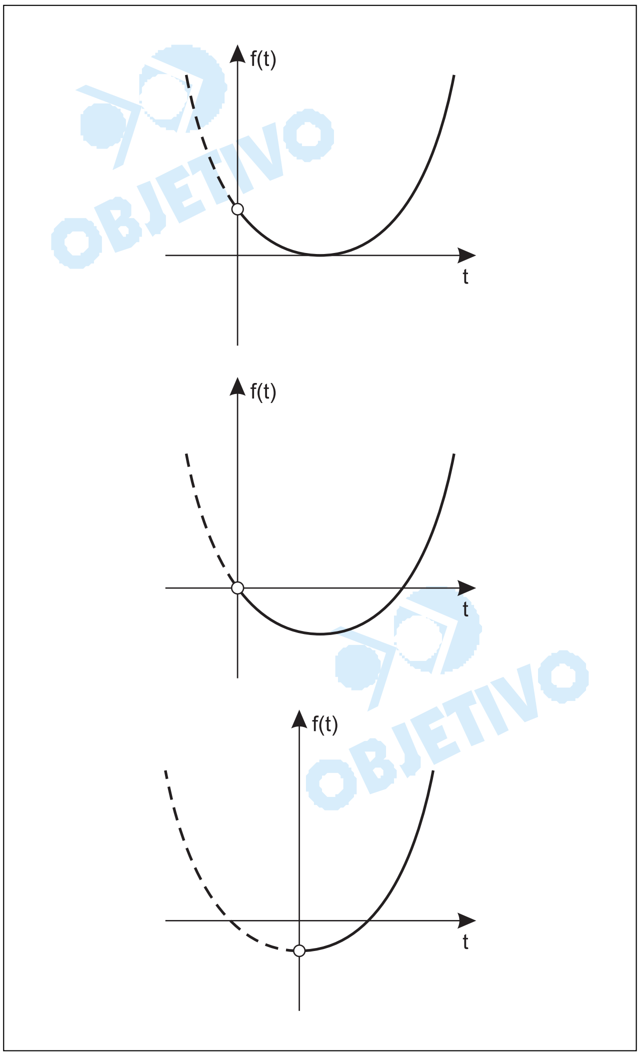
$$\Leftrightarrow 2^x + m \,.\, \frac{4}{2^x} - 2m - 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (2^x)^2 - (2m + 2) \,.\, 2^x + 4m = 0.$$

Fazendo $2^x = t$*, temos a equação*

$$t^2 - (2m + 2) \,.\, t + 4m = 0.$$

A equação $(2^x)^2 - (2m + 2) \,.\, 2^x + 4m = 0$ *admitirá uma única raiz real, se a função definida por* $f(t) = t^2 - (2m + 2)\,t + 4m$*, com* $t > 0$*, possuir gráfico de um dos tipos:*



Assim, sendo $\Delta = [-(2m + 2)]^2 - 4 \,.\, 4m = (2m - 2)^2$,
$S = t_1 + t_2 = 2m + 2$ *e* $P = t_1 \,.\, t_2 = 4m$ *devemos ter*

$$\begin{cases} \Delta = 0 \\ P > 0 \\ S > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \Delta > 0 \\ P = 0 \\ S > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} \Delta > 0 \\ P < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2m-2)^2 = 0 \\ 4m > 0 \\ 2m + 2 > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} (2m-2)^2 > 0 \\ 4m = 0 \\ 2m + 2 > 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} (2m-2)^2 > 0 \\ 4m < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow m = 1 \text{ ou } m = 0 \text{ ou } m < 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ ou } m \leq 0$$

Respostas: a) V = {1}

b) m = 1 ou $m \leq 0$

12

Sejam α, β e γ os ângulos internos de um triângulo.

a) Mostre que as tangentes desses três ângulos não podem ser, todas elas, maiores ou iguais a 2.

b) Supondo que as tangentes dos três ângulos sejam **números inteiros positivos**, calcule essas tangentes.

Resolução

Sendo α, β e γ ângulos internos de um triângulo, então:
a) tem-se $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ (I)

$$\text{se} \begin{cases} tg\ \alpha \geq 2 \Rightarrow \alpha > 60° \\ tg\ \beta \geq 2 \Rightarrow \beta > 60° \\ tg\ \gamma \geq 2 \Rightarrow \gamma > 60° \end{cases} \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma > 180°$$

o que contradiz a equação (I). Logo as tangentes dos três ângulos não podem ser, todas elas, maiores ou iguais a 2.

b) $\alpha + \beta = 180° - \gamma \Leftrightarrow tg(\alpha + \beta) = -\,tg\ \gamma \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \frac{tg\ \alpha + tg\ \beta}{1 - tg\ \alpha\ .\ tg\ \beta} = -\,tg\ \gamma \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow tg\ \alpha + tg\ \beta + tg\ \gamma = tg\ \alpha\ .\ tg\ \beta\ .\ tg\ \gamma$$

Supondo as tangentes dos três ângulos números inteiros e positivos e que não podem ser simultaneamente maiores ou iguais a 2, então necessariamente uma delas deve ser igual a 1.
Assim sendo, fazendo $tg\ \alpha = a$; $tg\ \beta = b$ e $tg\ \gamma = 1$, tem-se $a + b + 1 = ab \Leftrightarrow ab - a - b = 1 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a\,(b - 1) - (b - 1) = 2 \Leftrightarrow (a - 1)\ .\ (b - 1) = 2 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a - 1 = 1$ e $b - 1 = 2)$ ou $(a - 1 = 2$ e $b - 1 = 1) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (a = 2$ e $b = 3)$ ou $(a = 3$ e $b = 2)$, pois $a, b \in \mathbb{Z}_+^*$.

Respostas: a) Demonstração
b) As tangentes valem 1, 2 e 3