AULA

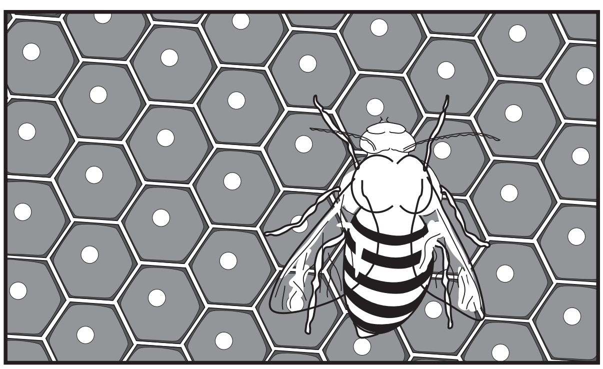
43

Polígonos e mosaicos

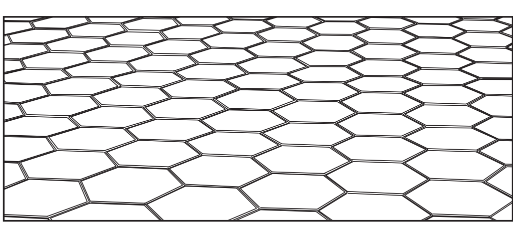
Para pensar

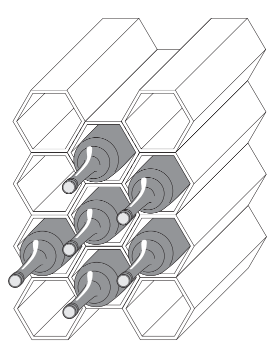
A regularidade de formas encontradas na natureza tem chamado a atenção do ser humano há muitos séculos. Ao observar e estudar essas formas, o homem tem aprendido muitas coisas.

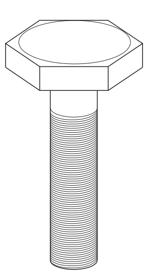
Com as abelhas, por exemplo, ele compreendeu que o formato dos favos de mel é muito bom para guardar objetos com grande economia de espaço.

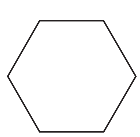


Exemplos da aplicação do formato das colméias são blocos de calçamento e suportes de garrafas para o armazenamento de bebidas alcóolicas em adegas.









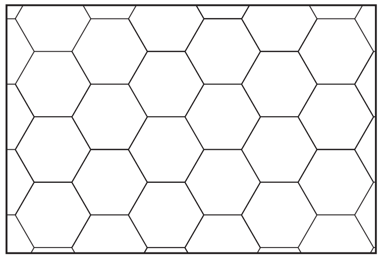
Esse mesmo formato também é encontrado na cabeça de um tipo de parafuso chamado pelos mecânicos e técnicos de **parafuso sextavado**.

Na geometria, parte da Matemática que estuda as figuras, essa forma é chamada de **hexagonal**.

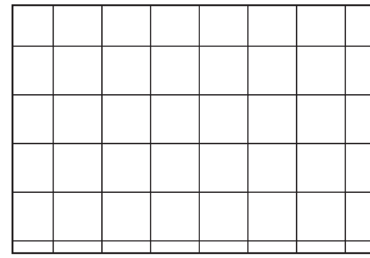
Nossa aula

O hexágono e as outras formas geométricas

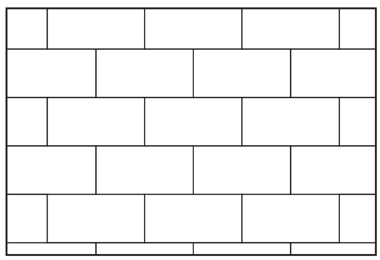
No revestimento de pisos e paredes de uma casa muitas vezes usamos ladrilhos (lajotas ou azulejos) de diferentes formatos, além da forma hexagonal. Veja os desenhos:



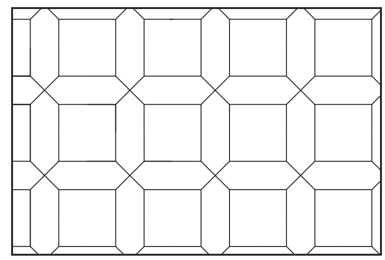
Formato hexagonal



Formato quadrangular

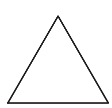
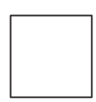
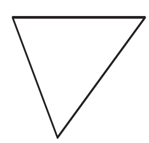
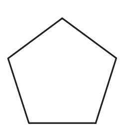
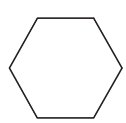
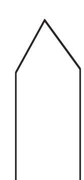
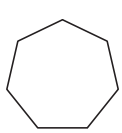
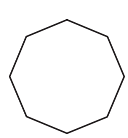
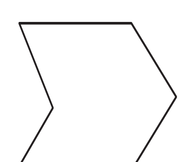
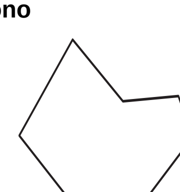
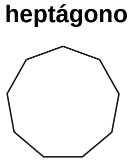


Formato retangular



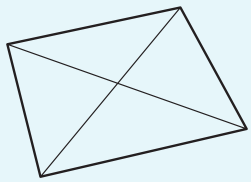
Composição entre formatos quadrangular e hexagonal

As figuras que aparecem nesses revestimentos são chamadas, pela Matemática, de **polígonos**. Os polígonos são figuras geométricas planas e podem ser classificados como **regulares** ou **irregulares**. No quadro abaixo, apresentamos alguns exemplos.

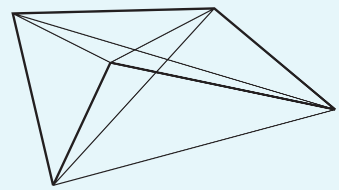
POLÍGONOS REGULARES: LADOS E ÂNGULOS TÊM A MESMA MEDIDA	POLÍGONOS IRREGULARES: LADOS E ÂNGULOS NÃO TÊM A MESMA MEDIDA
 triângulo  quadrado	 triângulo  quadrilátero
 pentágono  hexágono	 pentágono
 heptágono  octógono	 hexágono  heptágono
 eneágono  decágono	

Observação

Se você traçar as diagonais dos polígonos anteriores, vai perceber que, em alguns, elas ficam no interior e, em outros, ficam no exterior do polígono. Veja o exemplo:



Todas as diagonais no interior do polígono.

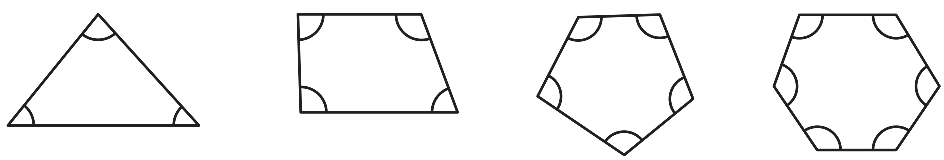


Pelo menos uma diagonal no exterior do polígono.

Quando um polígono possui todas as suas diagonais na parte interior, ele é chamado de **polígono convexo**. E quando pelo menos uma diagonal fica na parte exterior, ele é chamado de **polígono não convexo** ou **côncavo**.

A soma dos ângulos de um polígono

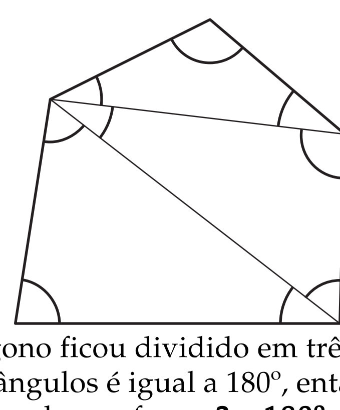
Num polígono o número de lados é sempre igual ao número de ângulos.



Na Aula 41 você aprendeu que a soma dos ângulos internos de um triângulo é igual a 180º. Agora vamos ver como calcular a soma dos ângulos de um polígono qualquer, como por exemplo do:

Pentágono (polígono de 5 lados)

Vamos desenhar um pentágono convexo qualquer, escolher um de seus vértices e traçar as diagonais que saem desse vértice, como mostra a figura:

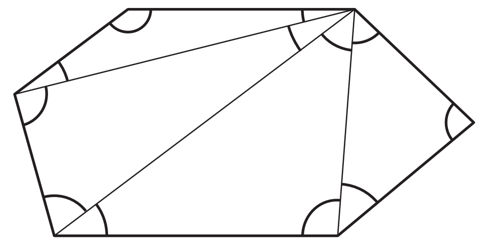


Observe que, ao fazermos isso, o pentágono ficou dividido em três triângulos. Como em cada triângulo a soma dos ângulos é igual a 180º, então para calcular a soma dos ângulos do pentágono podemos fazer: **3 . 180º = 540º**. Portanto:

A soma dos ângulos internos de um pentágono convexo qualquer é igual a 540º.

Hexágono (polígono de 6 lados)

Agindo de forma análoga, observamos que as diagonais dividem o hexágono convexo em quatro triângulos:



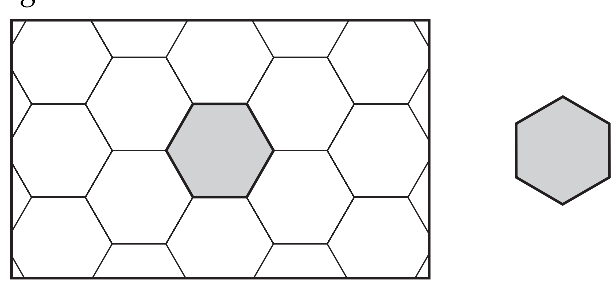
Nesse caso, a soma total é calculada assim: **4 . 180° = 720°**. Portanto:

A soma dos ângulos internos de um hexágono convexo qualquer é igual a 720°.

Esse processo também pode ser aplicado a outros polígonos convexos, de 7, 8, 9 ou mais lados. Experimente!

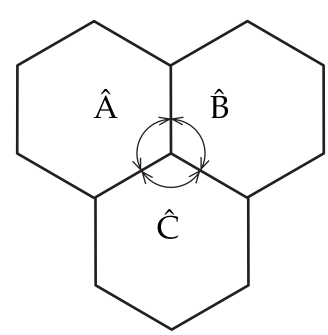
Os ângulos do hexágono regular

Observe a figura abaixo:



Ela é formada por hexágonos regulares que se encaixam sem se sobrepor ou deixar vãos. A esse tipo de composição costuma-se dar o nome de **mosaico**.

Neste mosaico, cada um dos vértices é vértice de três hexágonos ao mesmo tempo, como mostra a figura ao lado. Todos os hexágonos são regulares, isto é, possuem lados e ângulos de mesma medida, o que significa que $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$. Além disso, a soma desses três ângulos é igual a 360°, ou seja, eles formam um ângulo de uma volta completa: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 360°$. Então, cada um desses ângulos éigual a 360° . 3 = 120°.

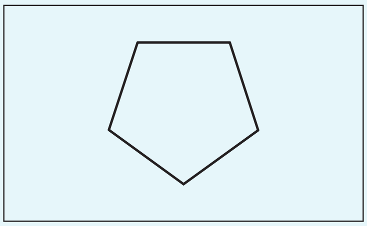


Você poderá chegar a essa mesma conclusão de outra maneira. Você acabou de aprender que a soma dos ângulos internos de um hexágono qualquer é igual a 720°. No caso do hexágono regular, basta fazer **720° . 6**, isto é, **120°**.

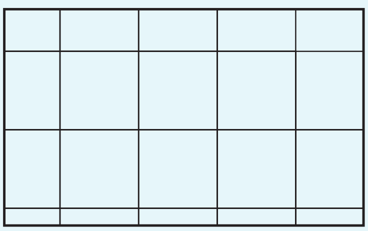
Atenção!
Esse processo é válido também para outros polígonos regulares.

Por que não se fazem ladrilhos pentagonais?

Você já viu que é possível revestir o piso ou as paredes de uma casa com ladrilhos de um **único tipo**. Podemos revestir uma parede usando, por exemplo, apenas ladrilhos quadrados ou, então, usando só ladrilhos com a forma de hexágonos regulares.



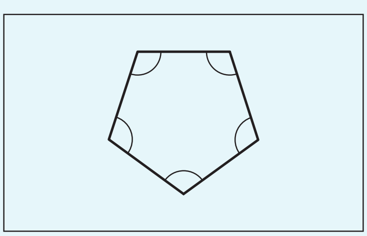
Será que é possível revestir uma parede usando apenas ladrilhos com a forma de pentágonos regulares? Você pode responder a essa pergunta fazendo o seguinte: recorte em uma folha de papel vários pentágonos iguais ao que está na figura ao lado. Em seguida, tente ajustá-los como se fossem ladrilhos. Será que você vai conseguir um encaixe perfeito?



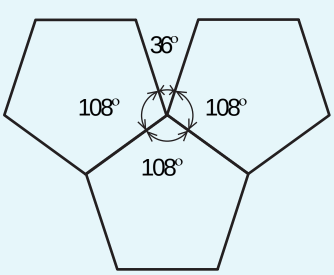
Já sabemos que é possível revestir uma parede usando apenas ladrilhos quadrados, pois os ângulos dos quadrados se encaixam perfeitamente, sem que haja sobra. Isso acontece porque cada um destes ângulos é igual a 90º, e **90 é divisor de 360**.

Já sabemos também que é possível revestir uma parede usando apenas ladrilhos em forma de hexágonos regulares, pois os ângulos dos hexágonos regulares encaixam-se perfeitamente, sem que haja sobra. Isso acontece porque cada um desses ângulos é igual a 120º, e **120 é divisor de 360**.

Portanto, para saber se é possível fazer revestimentos usando apenas ladrilhos com a forma de pentágonos regulares, devemos calcular a medida dos ângulos de um pentágono regular e, em seguida, verificar se essa medida é ou não um divisor de 360.



Lembre-se de que a soma dos ângulos de um pentágono dá 540º. Quando um pentágono é **regular**, todos os seus 5 ângulos são iguais (veja a figura ao lado). E, se a soma desses ângulos dá 540º, cada um deles é igual a 540º . 5, ou seja, 108º. Vamos verificar então se 108 é ou não um divisor de 360. Temos:



$$\begin{array}{r|l} \mathbf{360} & \mathbf{108} \\ \cline{2-2} \mathbf{36} & \mathbf{3} \end{array}$$

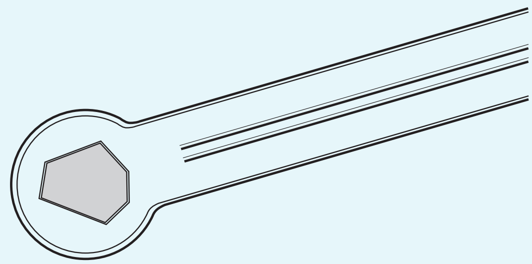
A divisão não é exata e, portanto, **108 não é divisor de 360**. Haverá, então, sobra quando tentarmos encaixar os pentágonos regulares. Logo, não é possível fazer revestimentos usando apenas ladrilhos com a forma de pentágonos regulares, como se pode ver na figura acima.

Texto extraído do ***Jornal do Telecurso 1º Grau***. Fundação Roberto Marinho, Ministério da Educação e Cultura e Fundação Universidade de Brasília, 1989.

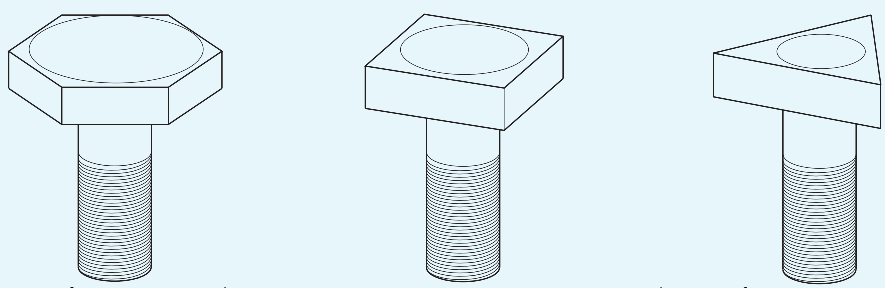
Curiosidade!

Num artigo da ***Revista do Professor de Matemática*** - nº 4, os professores Imenes e Jakubovic escreveram sobre o formato dos parafusos, apresentando algumas questões interessantes:

1. "Num parafuso, o polígono presente é sempre regular."
Isso se dá por uma razão simples: seria muito inconveniente apertar e desapertar um parafuso que não fosse regular, pois a chave precisaria ser especial para aquele parafuso e ela voltaria a se encaixar somente após uma rotação de 360º, como mostra a figura:

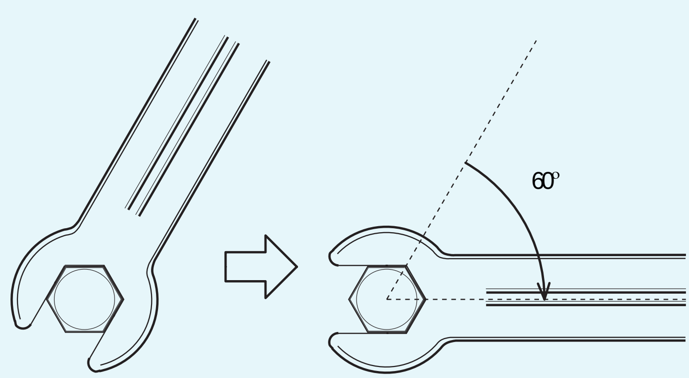


2. "O parafuso mais conveniente é o sextavado."



Parafuso sextavado ***Outros tipos de parafusos***

"Com o parafuso sextavado, completamos um passo da rosca após seis movimentos de 60º cada um.

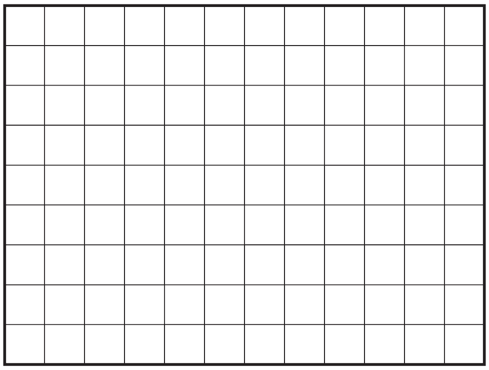


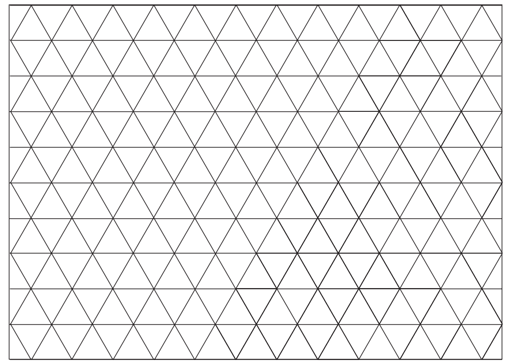
Quando um mecânico está consertando um defeito qualquer numa máquina, por exemplo num automóvel, muitas vezes ele tem pouco espaço para trabalhar (em geral em posições desconfortáveis). Por essa razão, dos três parafusos apresentados, o mais cômodo é o hexagonal, pois é o que pode ser apertado ou desapertado com giros menores (60º), isto é, com movimentos mais curtos do braço."

Exercícios

Exercício 1

Reproduza estas malhas, crie um padrão e forme um mosaico com ele.

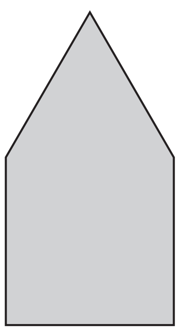


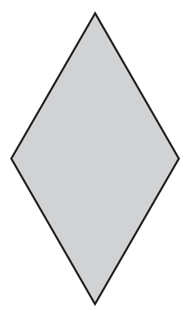


Exercício 2

Descubra a medida dos ângulos das figuras abaixo. Observe que:

- a primeira é um pentágono formado por um triângulo equilátero e um quadrado;
- a segunda é um losango formado por dois triângulos equiláteros.





Exercício 3

O losango é um polígono regular? Por quê?

Exercício 4

O octógono é um polígono de 8 lados. Desenhe um octógono, escolha um de seus vértices e trace todas as diagonais que "saem" desse vértice. Depois,
responda às perguntas:

a) Em quantos triângulos o octógono ficou dividido?

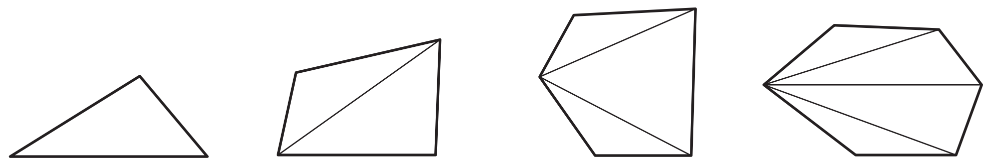
b) A soma dos ângulos de todos esses triângulos é igual à soma dos ângulos desse octógono?

c) Quanto dá, então, a soma dos ângulos de um octógono?

O Exercício 4 foi extraído do ***Jornal do Telecurso 1º Grau***. Fundação Roberto Marinho, Ministério da Educação e Cultura, Fundação Universidade de Brasília,1989.

Exercício 5

Ao desenhar um polígono, podemos, em geral, escolher um dos vértices e traçar as diagonais que "saem" desse vértice, como mostram as figuras:



Agora, com base nessa informação, complete a tabela abaixo:

NÚMERO DE LADOS DO POLÍGONO	NÚMERO DE DIAGONAIS QUE "SAEM" DE CADA VÉRTICE	NÚMERO DE TRIÂNGULOS FORMADOS	SOMA DE TODOS OS ÂNGULOS DO POLÍGONO
3	0	1	180º
4	1	2	360º
5			
6			
7			
8			
9			
10			

Exercício 6

Após preencher a tabela, observe-a com bastante atenção e responda: existe uma relação entre "o número de lados do polígono" e "o número de triângulos formados"? Qual é essa relação?

Exercício 7

Imagine um polígono com **n** lados, sendo **n** um número inteiro e maior que 3. Escolha um de seus vértices e imagine-se traçando todas as diagonais que "saem" desse vértice.

a) Escreva uma expressão que indique o número de triângulos formados nesse polígono de **n** lados que você imaginou.

b) Escreva uma expressão que indique como você poderia calcular a soma de todos os ângulos desse polígono de **n** lados.