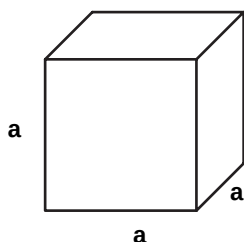


Calculando volumes

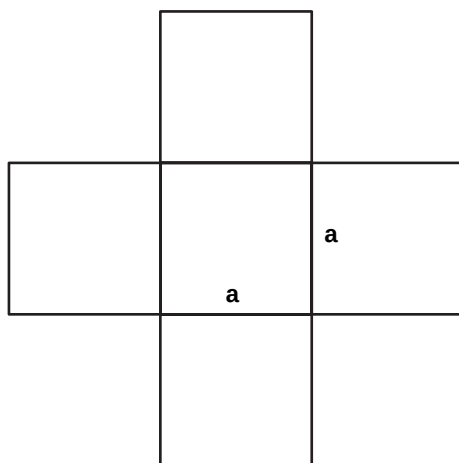
Para pensar

- Considere um cubo de aresta a :

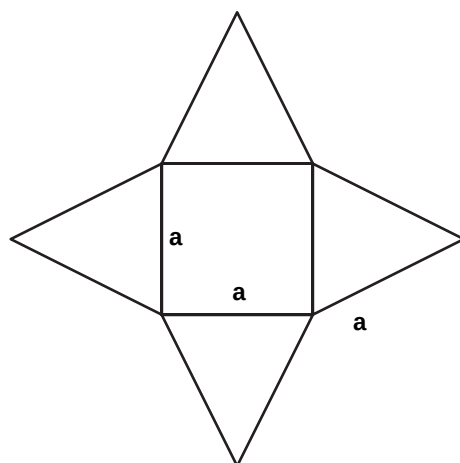


Para construir um cubo cuja aresta seja o dobro de a , de quantos cubos de aresta a precisaremos?

- Pegue uma caixa de fósforos e uma caixa de sapatos. Considerando a caixa de fósforos como unidade de medida, qual o volume da caixa de sapatos?
- Com cartolina, ou algum outro papel encorpado, construa um cubo e uma pirâmide de base quadrada de tal forma que:
 - a base da pirâmide seja um quadrado igual à face do cubo;
 - a altura da pirâmide seja igual à medida da aresta do cubo.Nessas condições, qual a relação entre os volumes da pirâmide e do cubo?



Esquema do cubo
(sem tampa)



Esquema da pirâmide
de base quadrada

Na Aula 15, estudamos que os objetos têm área, volume e forma. Vimos também que existem objetos com mesmo volume e formas diferentes.

Nesta aula, estudaremos um pouco mais esse assunto, aprendendo a calcular o volume de alguns sólidos. Mas, antes, veremos algumas situações que envolvem a idéia de volume e capacidade:

VOLUME DE	CAPACIDADE DE
• areia retirada de um rio • entulho retirado de uma obra • dejetos poluentes despejados nos rios, lagos ou mares	• uma garrafa • uma seringa • uma caixa d'água • ar dos nossos pulmões

Medir o volume ou a capacidade de um objeto é saber a quantidade de espaço que ele ocupa ou de que dispõe para armazenar.

EXEMPLO 1



Esta garrafa está cheia. Ela contém 290 mililitros (290 mℓ) de refrigerante:

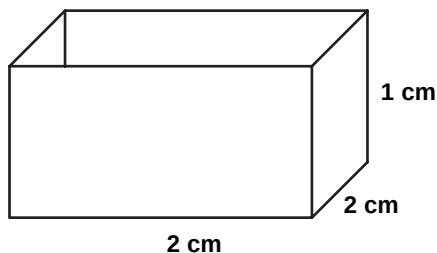
$$\text{Volume} = 290 \text{ mℓ}$$

Isso significa que 290 mℓ é a quantidade de líquido que a garrafa pode armazenar:

$$\text{Capacidade} = 290 \text{ mℓ}$$

EXEMPLO 2

Para encher uma caixa d'água de 2 metros de comprimento por 2 metros de largura e 1 metro de profundidade, foram necessários 4.000 litros de água.



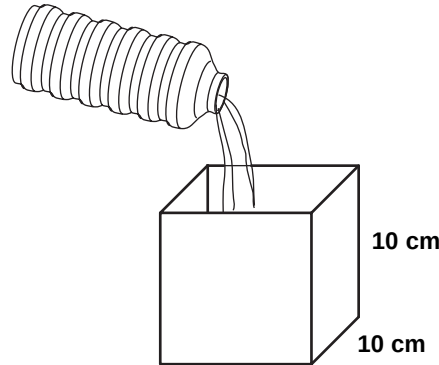
$$\text{Volume da caixa d'água} = 2 \text{ m} \times 2 \text{ m} \times 1 \text{ m} = 4 \text{ m}^3$$

$$\text{Capacidade da caixa d'água} = 4.000 \text{ litros}$$

As unidades de volume e de capacidade são estabelecidas pela seguinte relação:

$$1\ell = 1.000\text{ cm}^3$$

Isto é, se tivermos um cubo oco com 10 cm de aresta, podemos colocar nesse cubo, exatamente, 1 litro de líquido (água, suco, leite, óleo etc.).



Outras relações, decorrentes dessa, também são bastante utilizadas:

$$\begin{array}{lcl} 1\text{ m}^3 & = & 1.000\ell \\ 1\text{ cm}^3 & = & 1\text{ m}\ell \end{array}$$

As unidades de medida de volume fazem parte do Sistema Decimal de Medidas. As mais usadas são:

metro cúbico (m^3)
decímetro cúbico (dm^3)
centímetro cúbico (cm^3)
milímetro cúbico (mm^3)

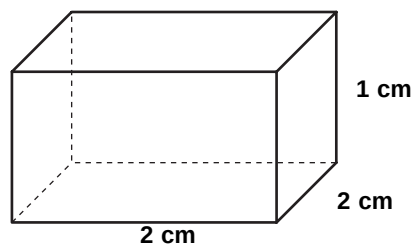
$$1\text{ m}^3 = 1.000\text{ dm}^3 = 1.000.000\text{ cm}^3 = \dots$$

Desse modo são necessários 1.000.000 de cubinhos de 1 cm de aresta para formar um cubo de 1 m de aresta.

Volume do paralelepípedo

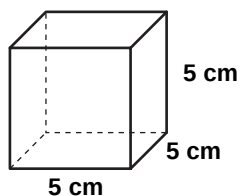
Paralelepípedo é o nome que a Matemática dá aos objetos que têm a forma de uma caixa de sapato, de um tijolo etc. Na verdade, a definição de paralelepípedo é mais geral. Se quisermos ser mais precisos, uma caixa de sapato é um paralelepípedo reto de base retangular.

Na Aula 15, calculamos o volume do paralelepípedo, multiplicando suas dimensões (comprimento, largura e altura):



$$V = a \cdot b \cdot c$$

Qual o volume do cubo cuja aresta mede 5 cm? (Lembre-se de que o cubo é um paralelepípedo cujas dimensões têm a mesma medida).



$$V = 5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} \cdot 5 \text{ cm} = 125 \text{ cm}^3$$

Imagine que esse cubo seja oco. Quantos litros de água seriam necessários para enchê-lo até a boca?

Como: $1 \ell = 1.000 \text{ cm}^3$

Então, fazendo uma regra de três, temos:

$$\begin{aligned} 1 \text{ litro} &= 1.000 \text{ cm}^3 \\ x \text{ litros} &= 125 \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

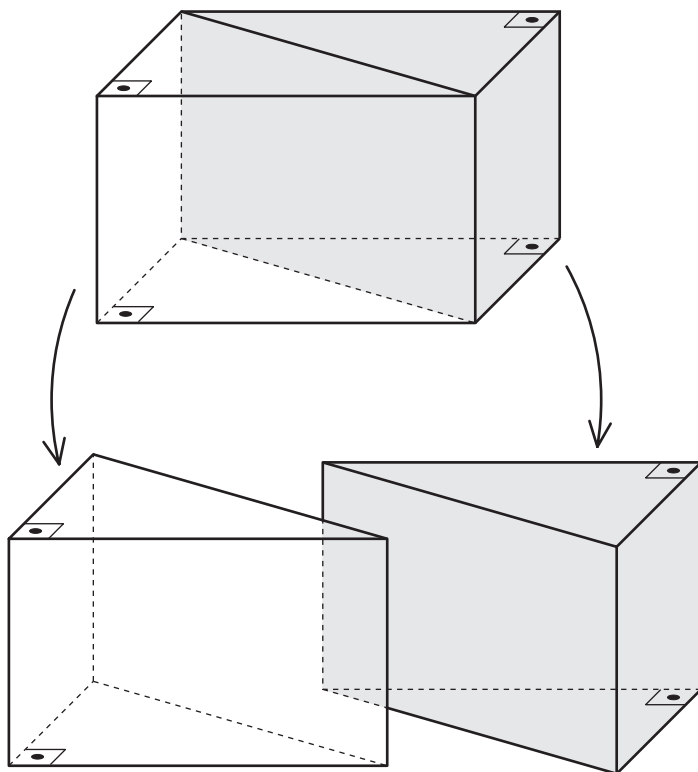
$$x = \frac{1 \cdot 125}{1.000} = 0,125 \text{ litros} = 125 \text{ mililitros}$$

Podemos colocar **125 ℓ** de água num cubo cujo volume é de 125 cm^3 .

Decompondo figuras sólidas

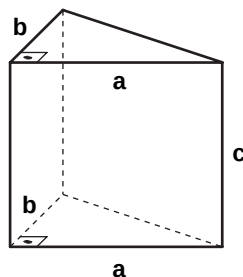
O paralelepípedo pode ser decomposto em duas outras figuras sólidas.

Veja:



Cada um dos sólidos que surge pela decomposição deste paralelepípedo retângulo é um exemplo de prisma. Temos, em nosso caso, dois **prismas retos de base triangular**. Observe que, neste exemplo, a base de cada prisma é um **triângulo retângulo**.

O volume do prisma reto de base triangular é metade do volume do paralelepípedo. Portanto, o volume do prisma reto de base triangular é:

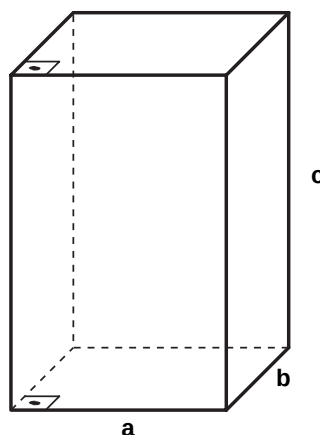


$$V = \frac{a \cdot b \cdot c}{2}$$

Note que o paralelepípedo também é um prisma reto, porém de base retangular.

Para obter o volume de um prisma com uma base qualquer multiplicamos a **área da base** pela **altura**. Por exemplo:

Prisma reto de base quadrangular(ou paralelepípedo):



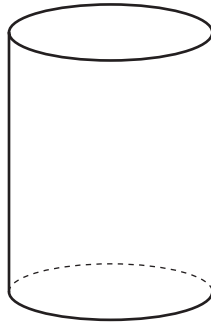
Volume = área da base x altura

$$V = (a \cdot b) \cdot c$$

$$V = a \cdot b \cdot c$$

que é o resultado já conhecido para o volume do paralelepípedo.

Cilindro é o nome que a Matemática dá aos objetos que têm a forma de um latão de querosene ou de um cigarro. O cilindro é um sólido geométrico cujas bases são dois círculos iguais, como na figura:



O volume do cilindro pode ser determinado do mesmo modo que o volume do prisma reto:

$$\text{Volume do cilindro} = \text{área da base} \cdot \text{altura}$$

Como a base do cilindro é um círculo, temos:

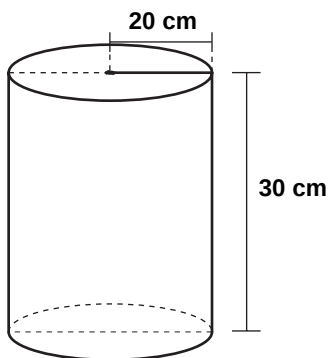
Área da base = área do círculo = πr^2 , onde r é o raio do círculo

Então, a área do cilindro pode ser expressa por:

$$A = \underbrace{\pi r^2}_{\substack{\text{área do} \\ \text{círculo} \\ \text{da base}}} \cdot \underbrace{a}_{\substack{\text{altura do} \\ \text{cilindro}}}$$

EXEMPLO 4

Determine o volume de um cilindro de 30 centímetros de altura e cuja base tem 20 centímetros de raio.



$$V = \text{área da base} \cdot \text{altura}$$

$$\text{Área da base} = \pi r^2$$

$$A = \pi \cdot 20^2 = 3,14 \cdot 400$$

$$A = 1.256 \text{ cm}^2$$

$$\text{Volume} = 1.256 \cdot 30 = 37.680 \text{ cm}^3$$

Densidade de um corpo

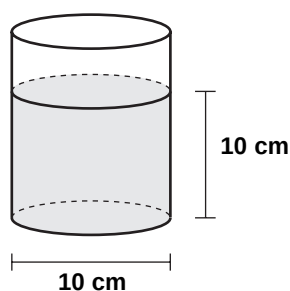
Na Aula 14, aprendemos que a **massa** de um objeto pode ser dada pelo seu peso. As unidades de medida de massa são o quilograma (**kg**) e o grama (**g**).

Podemos definir a densidade de um objeto (ou corpo) como o quociente entre sua massa e seu volume:

$$\text{Densidade} = \frac{\text{massa}}{\text{volume}}$$

Um método prático para determinar o volume de objetos, por exemplo o de uma pedra, é o seguinte:

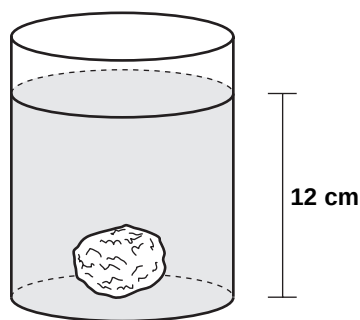
- Pegue um recipiente transparente, cujas medidas sejam fáceis de calcular. Por exemplo, um copo na forma de um cilindro.



- Encha-o com água e meça a altura que a água atingiu. No nosso exemplo, o volume de água é:

$$V = \pi \cdot 5^2 \cdot 10 = 3,14 \cdot 25 \cdot 10 = 785 \text{ cm}^3$$

- Em seguida, mergulhe a pedra na água e meça novamente a altura atingida.



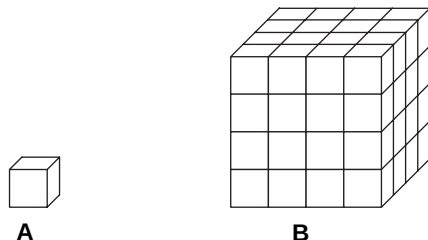
$$\text{Volume} = \pi \cdot 5^2 \cdot 12 = 3,14 \cdot 25 \cdot 12 = 942 \text{ cm}^3$$

A diferença entre os dois resultados é o volume da pedra:

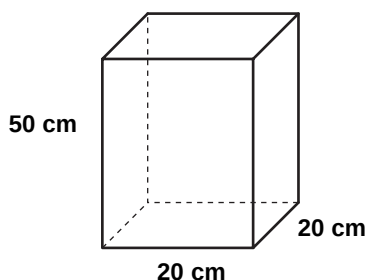
$$\text{Volume da pedra} = 942 - 785 = \mathbf{157 \text{ cm}^3}.$$

Exercício 1

De quantos cubinhos iguais a A precisamos para montar um cubo igual a B?

**Exercício 2**

Quantos litros de óleo cabem no galão abaixo?

**Exercício 3**

O que significa m^3 ?

Exercício 4

Qual o volume de um bolo cuja altura é 5 cm e cujo diâmetro é 60 cm?

Exercício 5

Quantos litros de leite cabem em um galão cilíndrico de 20 cm de diâmetro e 60 cm de altura?

Exercício 6

Meça as arestas e calcule o volume de uma caixa de pasta de dentes.

Exercício 7

Calcule a capacidade, em metros cúbicos, de uma caixa que possa conter o fogão de sua casa.

Exercício 8

Calcule o volume de duas latas de óleo com formatos diferentes.