

A reta e os números reais

Para pensar

*P*reencha os espaços abaixo com números

da seguinte lista:

4,2 - 5 - 3,1 0,555... 0 $\sqrt{11}$

- números inteiros não naturais:
- números racionais não inteiros:
- números reais não racionais:
- números reais não irracionais:

Nossa aula

Vimos, na Aula 59, que os números racionais podem ser: frações, inteiros, decimais exatos e dízimas periódicas. Observe estes dois números:

0,25 e 0,252525...

O primeiro tem duas casas decimais, portanto um **número finito** de casas decimais. Por isso, é chamado de **decimal exato**.

O segundo tem um **número infinito** de casas decimais com um período que se repete (25). Esse número é conhecido como **dízima periódica**.

Vejamos o que acontece com o número decimal:

0,010110111...

Ele tem uma infinidade de casas decimais que não se repetem, portanto, não é decimal periódico.

Pense um pouco e descubra as casas que virão a seguir nesse número.

Após a vírgula, a 1ª casa decimal é o zero, seguido do número 1; depois outro zero, seguido duas vezes do número 1, e assim por diante. Logo, os próximos algarismos serão o zero e depois quatro vezes o número 1. Esse número não é racional. Ele é um exemplo de **número irracional**.

Outro exemplo de número irracional, bastante conhecido e muito importante em Matemática, especialmente usado em geometria, é o número $\pi = 3,141592...$

Ao estudar a operação de radiciação (Aula 54), e particularmente a raiz quadrada, vimos que nem todo número natural tem raiz quadrada natural.

Os números naturais 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 e 100, são chamados **quadrados perfeitos**. As raízes quadradas desses números são também números naturais:

$$\begin{array}{lll} \sqrt{0}=0 & \sqrt{16}=4 & \sqrt{49}=7 \\ \sqrt{1}=1 & \sqrt{25}=5 & \sqrt{64}=8 \\ \sqrt{4}=2 & \sqrt{36}=6 & \sqrt{81}=9 \\ \sqrt{9}=3 & & \sqrt{100}=10 \end{array}$$

Os outros números naturais, diferentes dos números quadrados perfeitos, têm como raízes quadradas números irracionais. Outras raízes, com índices diferentes de 2 e que não são números naturais, também são números irracionais. Por exemplo:

$$^3\sqrt{4} \quad ^4\sqrt{5} \quad ^3\sqrt{100}$$

Ao fazer o cálculo das raízes abaixo, numa calculadora, encontramos os seguintes resultados:

$$\sqrt{2} = 1,414213...$$

$$\sqrt{3} = 1,73205...$$

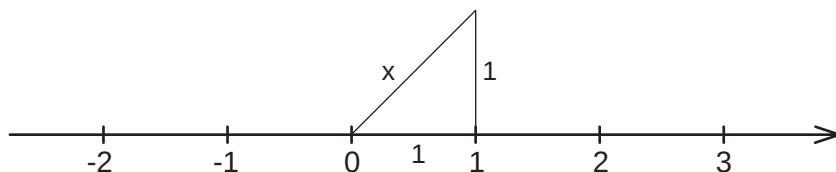
$$\sqrt{5} = 2,23606...$$

Os pontos que aparecem no final do número não aparecem no visor da máquina de calcular. Eles indicam que as casas decimais continuariam a aparecer se a máquina fosse maior e comportasse mais algarismos.

Vimos também que podemos assinalar todos os números racionais na reta numérica, associando a cada número um ponto da reta bem determinado.

Podemos fazer o mesmo com os números irracionais?

Vejamos a representação de $\sqrt{2}$ na reta numérica, com auxílio de uma construção geométrica. Vamos construir um triângulo retângulo isósceles de catetos iguais a 1 sobre a reta numérica:



Calculamos a medida da hipotenusa aplicando o Teorema de Pitágoras:

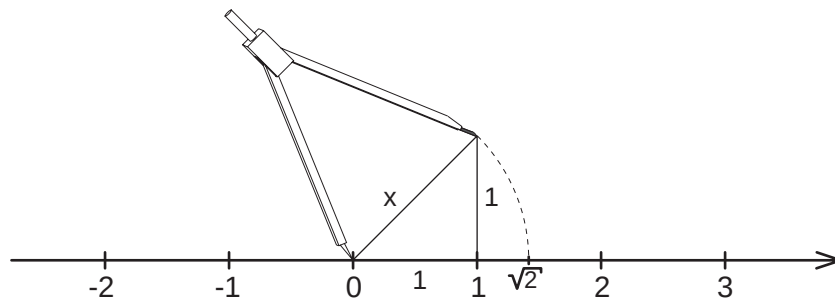
$$x = 1^2 + 1^2$$

$$x = 1 + 1$$

$$x = 2$$

$$x = \sqrt{2}$$

Para marcar na reta a medida da hipotenusa, que é $\sqrt{2}$, posicionamos em O a ponta sem grafite (ponta seca) de um compasso, com abertura igual ao tamanho da hipotenusa. Descrevendo um arco com o compasso, encontramos o ponto na reta que corresponde a $\sqrt{2}$:



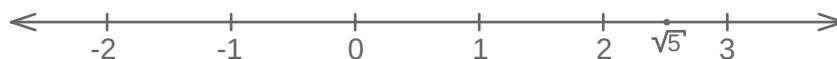
Na prática, localizamos uma raiz quadrada na reta quando conhecemos um valor aproximado da raiz. Por exemplo: localize o número $\sqrt{5}$ na reta numérica. Vejamos quais são os números quadrados perfeitos mais próximos de 5:

$$5 \text{ está entre } 4 \text{ e } 9 \quad = \quad 4 < 5 < 9$$

$$\sqrt{5} \text{ está entre } \sqrt{4} \text{ e } \sqrt{9} \quad = \quad \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9}$$

$$\sqrt{5} \text{ está entre } 2 \text{ e } 3 \quad = \quad 2 < \sqrt{5} < 3$$

Assim, podemos assinalar a $\sqrt{5}$ entre os números 2 e 3:



Procurando o valor de $\sqrt{5}$ por tentativa, teremos uma localização mais exata. Sabendo que $\sqrt{5}$ está entre 2 e 3, podemos escrever que $\sqrt{5} = 2, \dots$ Experimentamos então alguns números, por exemplo:

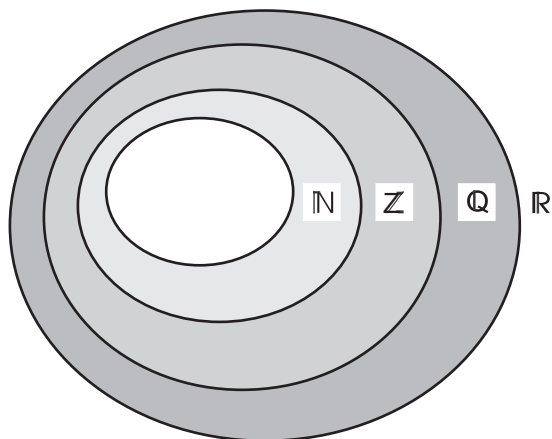
$$2,1 \quad = \quad (2,1)^2 = 4,41, \text{ que é um valor ainda distante de } 5;$$

$$2,2 \quad = \quad (2,2)^2 = 4,84, \text{ que é bem próximo de } 5.$$

Então, podemos representar $\sqrt{5}$ na reta com uma localização razoável, ou seja, próxima do valor exato do número:



Sabendo que é possível representar na reta os números racionais e os irracionais, podemos chamá-la **reta real**. O **conjunto dos números reais** ($\mathbb{R}$), que é a reunião do conjunto dos números racionais com o conjunto dos números irracionais. Veja o diagrama abaixo:



O diagrama mostra a relação entre os diversos conjuntos: todo número natural é inteiro; todo número inteiro é racional; todo número racional é real, assim como, todo número irracional é também real. Inversamente, todo ponto de reta real representa um número, que pode ser racional ou irracional

Exercícios

Exercício 1

Assinale na reta numérica os seguintes números reais:

– 2,5 0,75 $\sqrt{2}$ π – 0,666...

Exercício 2

Assinale V se a afirmação for verdadeira ou F se for falsa:

- a) () $\frac{1}{3}$ é um número real menor que 1.
- b) () $\sqrt[3]{10}$ é um número real menor que 3.
- c) () 2,151617... é um número racional.
- d) () – 5 é um número inteiro, logo é um número real.
- e) () π não é um número real.
- f) () $\sqrt{3}$ é um número real
- g) () $\sqrt{3}$ é um número racional.

Exercício 3

- a) Qual o menor número inteiro maior que $\frac{3}{4}$
- b) Qual o maior número inteiro menor que $-\frac{1}{4}$

Exercício 4

Dê exemplo de:

- a) dois números inteiros maiores que $-\frac{1}{4}$
- b) dois números racionais que estão entre – 1 e 0.