

Operações com frações

Introdução

Nesta aula vamos rever operações com frações, verificando a validade das propriedades operatórias dos números racionais.

Veremos também o cálculo de expressões numéricas com frações, de acordo com a ordem em que as operações devem ser efetuadas, como vimos na Aula 61.

Nossa aula

A adição e a subtração de frações homogêneas (que têm denominadores iguais) são efetuadas, repetindo-se os denominadores e efetuando-se as devidas operações com os numeradores. Veja:

$$\text{a) } \frac{3}{7} + \frac{2}{7} = \frac{3+2}{7} = \frac{5}{7}$$

$$\text{b) } \frac{5}{8} - \frac{3}{8} = \frac{5-3}{8} = \frac{2}{8}$$

As propriedades da adição de números naturais também são válidas para a adição de números fracionários.

Propriedade comutativa: a ordem das parcelas não altera a soma

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{2}{5} = \frac{3}{5}$$

Propriedade associativa: podemos associar duas ou mais parcelas, de maneiras diferentes, sem que o resultado (soma) seja alterado.

$$\left(\frac{3}{8} + \frac{1}{8}\right) + \frac{5}{8} = \frac{3}{8} + \left(\frac{1}{8} + \frac{5}{8}\right) = \frac{9}{8}$$

Lembre-se que uma fração do tipo $9/8$, que tem o numerador maior que o denominador (imprópria), é maior que a unidade ($8/8$). Portanto, pode ser escrita na forma de número misto.

O número misto é formado por uma parte inteira e uma parte fracionária:

$$\frac{9}{8} = \frac{8}{8} + \frac{1}{8} = 1 + \frac{1}{8} = 1\frac{1}{8} \quad \rightarrow \quad \text{número misto lê-se: um inteiro e um oitavo}$$

No caso de efetuarmos a adição e a subtração com frações heterogêneas (que têm denominadores diferentes), é preciso transformá-las em frações equivalentes às que tenham denominadores iguais.

Frações equivalentes são as que têm mesmo valor, mas cujos termos são diferentes.

Para obtermos frações equivalentes, é preciso multiplicar ou dividir o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número natural, diferente de zero.

EXEMPLO 2

Ao determinarmos as frações equivalentes a $\frac{2}{3}$, temos:

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{6}{9} = \frac{8}{12} = \frac{10}{15} = \frac{12}{18} = \frac{14}{21} = \frac{16}{24} = \dots$$

$$\frac{2}{3} = \frac{4}{6}$$

Vamos efetuar a seguinte adição:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} + \frac{1}{3} &= \\ &= \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \\ &= \frac{3+2}{6} = \frac{5}{6} \end{aligned}$$

Como o número 6 é múltiplo comum a 2 e a 3, ele será o denominador das frações equivalentes às frações dadas.

Então, é preciso multiplicar o numerador e o denominador de cada fração, pelo mesmo número, de maneira a obtermos o denominador 6.

Para subtrair frações, seguimos o mesmo procedimento:

$$\frac{5}{8} - \frac{1}{6} = \quad (\text{Múltiplo comum: } 24).$$

$$\frac{15}{24} - \frac{4}{24} = \frac{15-4}{24} = \frac{11}{24}$$

Sempre que efetuamos qualquer operação com frações, devemos encontrar o resultado mais simples possível, ou seja, uma fração equivalente com numerador e denominador menores.

O processo usado para simplificar uma fração é a aplicação da mesma propriedade usada para encontrar frações equivalentes, ou seja:

Na simplificação da fração $\frac{64}{60}$, temos:

$$\frac{64}{60} = \frac{32}{30} = \frac{16}{15} \quad \text{ou} \quad \frac{64}{60} = \frac{16}{15}$$

Portanto, $\frac{16}{15}$ é a forma simplificada da fração $\frac{64}{60}$.

Vejamos alguns exemplos de expressões com frações:

$$\frac{5}{6} - \frac{7}{12} + \frac{3}{8} = \quad \text{Múltiplo comum: 24.}$$

$$= \frac{20}{24} - \frac{14}{24} + \frac{9}{24} = \quad \text{Efetuar as operações na ordem em que aparecem.}$$

$$= \frac{6}{24} + \frac{9}{24} =$$

$$= \frac{15}{24} = \frac{5}{8} \quad \text{Simplificar o resultado.}$$

$$1 - \frac{1}{10} - \frac{2}{5} = \quad \text{Múltiplo comum: 10.}$$

$$\frac{10}{10} - \frac{1}{10} - \frac{4}{10} = \quad \text{O número inteiro pode ser escrito como uma fração, no caso: } \frac{10}{10}.$$

$$\frac{9}{10} - \frac{4}{10} =$$

$$\frac{5}{10} = \frac{1}{2} \quad \text{Simplificar o resultado.}$$

Quando as expressões apresentam os sinais de pontuação, devemos seguir as regras das expressões numéricas, ou seja:

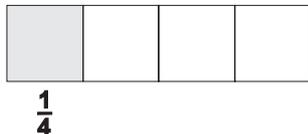
- 1) Inicialmente, efetuamos as operações que estão entre parênteses ().
- 2) Em seguida, as que estão entre colchetes [].
- 3) E, por último, as que estão entre chaves { }.

Observe:

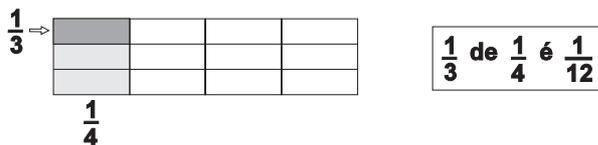
$$\begin{aligned}
 & 2 - \left[\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5} \right) \cdot \frac{1}{6} \right] = \\
 & = 2 - \left[\left(\frac{15}{20} - \frac{4}{20} \right) \cdot \frac{1}{6} \right] = \\
 & = 2 - \left[\frac{11}{20} \cdot \frac{1}{6} \right] = \\
 & = 2 - \left[\frac{33}{60} - \frac{10}{60} \right] = 2 - \frac{23}{60} = \\
 & = \frac{120}{60} - \frac{23}{60} = \frac{97}{60} = \\
 & = \frac{60}{60} + \frac{37}{60} = 1 \frac{37}{60}
 \end{aligned}$$

Multiplicação de frações

Na figura abaixo, dividida em quatro partes iguais, temos assinalada uma das partes que representa $\frac{1}{4}$ da figura.



Para representar $\frac{1}{3}$ da parte assinalada, ou seja $\frac{1}{3}$ de $\frac{1}{4}$, vamos dividir essa parte ($\frac{1}{4}$) em três partes iguais e, em seguida, estender a divisão para a figura toda.



$$\frac{1}{3} \text{ de } \frac{1}{4} \text{ é } \frac{1}{12}$$

Observe que cada parte da figura, após a segunda divisão, equivale a $\frac{1}{12}$ da figura toda, logo:

$$\frac{1}{3} \text{ de } \frac{1}{4} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$$

Então:

Para multiplicar frações, devemos multiplicar os numeradores e os denominadores entre si.

Quando fazemos uma multiplicação de frações, podemos simplificar a operação usando o processo de cancelamento. Veja:

$$\frac{5}{8} \cdot \frac{4}{9} =$$

$$= \frac{5}{\cancel{2}^1 8} \cdot \frac{\cancel{4}^1}{9} = \quad \text{Antes de efetuar a multiplicação, devemos simplificar o 8 e o 4 por um número múltiplo comum}$$

$$= \frac{5}{18}$$

Para multiplicar uma fração por um número inteiro, devemos multiplicar esse número pelo numerador da fração e repetir o denominador. Por exemplo:

$$2 \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{5}$$

Nas expressões numéricas com frações, devemos lembrar que a ordem em que as operações devem ser efetuadas é a mesma que já aprendemos na aula anterior, ou seja:

- Potenciação e radiciação.
- Multiplicação e divisão.
- Adição e subtração.

EXEMPLO 1

Resolver a expressão:

$$3 - \left[2 \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5} - \frac{4}{5} \right) \right] =$$

$$3 - \left[2 \cdot \left(\frac{5}{15} + \frac{6}{15} - \frac{4}{5} \right) - \frac{4}{5} \right] =$$

$$3 - \left[2 \cdot \left(\frac{11}{15} - \frac{4}{5} \right) \right] =$$

$$3 - \left[\frac{22}{15} - \frac{4}{5} \right] = 3 - \left[\frac{22}{15} - \frac{12}{15} \right] =$$

$$= 3 - \frac{10}{15} = \frac{45}{15} - \frac{10}{15} =$$

Exercício 1

Um lojista vende três partes de uma peça de tecido: $\frac{7}{8}$ m, $\frac{1}{2}$ m e $\frac{1}{4}$ m. Quantos metros vendeu ao todo?

Exercício 2

Complete o quadro de modo que a soma dos números de cada linha, de cada coluna e da diagonal seja a mesma:

$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{2}$
	$\frac{5}{12}$	$\frac{7}{12}$
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$

Exercício 3

Ao receber seu salário, Pedro gastou $\frac{2}{5}$ com o aluguel e $\frac{1}{2}$ do que sobrou em custos com alimentação. Que fração do salário ainda restou?

Exercício 4

Efetue e simplifique o resultado, sempre que possível:

a) $\frac{3}{4} - \frac{1}{2} + \frac{3}{20} =$
 b) $\left(\frac{2}{3} + \frac{1}{6}\right) - \left(1 - \frac{3}{10}\right) =$

c) $\frac{3}{10} + \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{4} =$
 d) $\frac{9}{10} \cdot \left(4 - \frac{1}{3} \cdot 10\right) =$