AULA
68

Sistemas do 1º grau

Introdução

Pedro e José são amigos. Ao saírem do trabalho, passaram por uma livraria onde havia vários objetos em promoção. Pedro comprou 2 cadernos e 3 livros e pagou R$ 17,40, no total. José gastou R$ 11,20 na compra de 2 livros e 1 caderno. Os dois ficaram satisfeitos e foram para casa.

No dia seguinte, quiseram contar a um terceiro colega sobre suas compras, mas não se lembravam do preço unitário dos livros. Sabiam apenas que todos os livros, assim como todos os cadernos, tinham o mesmo preço.

E agora... Será que existe algum modo de descobrir o preço de cada livro ou caderno com as informações que temos?

Acompanhe a aula e descubra...

Nossa aula

Em aulas anteriores, você viu que existem equações do 1º grau com duas incógnitas, como por exemplo:

$x + y = 5$ $\qquad$ $x - y = 3$ $\qquad$ $x + 2y = 8$

Você viu, também que as equações do 1º grau com duas variáveis admitem infinitas soluções:

$x + y = 5$ $\qquad$ e $\qquad$ $x - y = 3$

x	y
0	5
1	4
2	3
3	2
4	1
5	0
...	...

x	y
0	–3
1	–2
2	–1
3	0
4	1
5	2
...	...

Observando as tabelas de soluções das duas equações, verificamos que o par (4; 1), isto é, $x = 4$ e $y = 1$, é solução para as duas equações. Dessa forma, podemos dizer que as equações $x + y = 5$ e $x - y = 3$ formam um **sistema** de equações do 1º grau que admitem uma solução comum.

A Matemática utiliza o símbolo { para indicar que duas (ou mais) equações formam um sistema. Veja os exemplos:

$$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y = 4 \\ 2x - y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2y = 5 \\ 2x + 5y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x + y + z = 1 \\ x - y - 3z = 4 \\ x = 2 \end{cases}$$

Observação: Aqui, vamos estudar apenas os sistemas do 1º grau com duas equações de duas variáveis.

Resolução de sistemas

Resolver um sistema é encontrar um par de valores (**x** e **y**) que tornem verdadeiras as equações que o formam.

Por exemplo, o par (3; 2) é solução do sistema $\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$?

Para fazer verificação, devemos substituir os valores x = 3 e y = 2 em ambas as equações:

$$\begin{array}{cc} x - y = 1 & x + y = 5 \\ 3 - 2 = 1 & 3 + 2 = 5 \\ 1 = 1 & 5 = 5 \\ \text{(verdadeiro)} & \text{(verdadeiro)} \end{array}$$

Sim, o par (3; 2) é solução do sistema, pois torna as equações verdadeiras.

O método da substituição

Esse método de resolução de um sistema consiste em "tirar" o valor de uma incógnita e substituir esse valor na outra equação. Veja um exemplo:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Escolhemos uma das equações e "tiramos" o valor de uma das incógnitas, ou seja, estabelecemos seu valor em função da outra incógnita, assim:

$$x - y = 1 \quad \rightarrow \quad x = 1 + y$$

Agora, temos o valor de **x** em função de **y** e podemos substituir esse valor na outra equação:

$$\begin{gathered} x + y = 5 \\ \Downarrow \\ 1 + y + y = 5 \\ 1 + 2y = 5 \\ 2y = 5 - 1 \\ 2y = 4 \\ y = 2 \end{gathered}$$

Como $x = 1 + y \rightarrow x = 1 + 2 \rightarrow x = 3$.

Temos então que o par (3; 2) é solução do sistema.

Qual é mesmo o preço do livro?

Releia o problema proposto na introdução deste capítulo e acompanhe sua resolução.

Uma etapa importante na solução de um problema é a tradução dos dados em linguagem matemática. Para essa etapa, vamos usar as variáveis x e y em vez de **caderno** e **livro**. Organizamos os dados assim:

Pedro: 3 livros + 2 cadernos = R$ 17,40 → $3x + 2y = 17{,}40$
José: 2 livros + 1 caderno = R$ 11,20 → $2x + y = 11{,}20$

Temos, assim, o sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 17{,}40 \\ 2x + y = 11{,}20 \end{cases}$$

Estabelecendo o valor de **y** em função de **x** na 2ª equação, temos:
$y = 11{,}20 - 2x$

Substituindo esse valor na 1ª equação:
$3x + 2\,(11{,}20 - 2x) = 17{,}40$

Temos uma equação do 1º grau, com apenas uma incógnita. Resolvendo essa equação:

$$\begin{aligned} 3x + 22{,}40 - 4x &= 17{,}40 \\ -x &= 17{,}40 - 22{,}40 \\ -x &= -5 \\ x &= 5 \end{aligned}$$

Como $y = 11{,}20 - 2x$ → $y = 11{,}20 - 10$ → $y = 1{,}20$

Portanto, cada livro custou **R$ 5,00** e cada caderno, **R$ 1,20**.

Verificação
Pedro: $3 \,.\, 5 + 2 \,.\, 1{,}20 = 15 + 2{,}40 = 17{,}40$
José: $2 \,.\, 5 + 1{,}20 = 10 + 1{,}20 = 11{,}20$

O método da adição

Esse outro método de resolução de um sistema consiste em somar os termos das equações. Veja o exemplo:

$$\begin{cases} x - y = -4 \\ 2x + y = 9 \end{cases}$$

Somando as equações:

$$\begin{array}{rl} x - y = -4 & \\ 2x + y = 9 & + \\ \hline 3x \quad = 5 & \end{array}$$

$$x = \frac{5}{3}$$

Veja que quando somamos as duas equações o termo em y se anula. Por que isso ocorreu? Pense!

Para obter o valor de **y**, devemos substituir o valor de **x**, encontrado em uma das equações:

$$x - y = -4 \quad \rightarrow \quad \frac{5}{3} - y = -4 \quad \rightarrow \quad -y = -4 - \frac{5}{3}$$

$$-y = \frac{-12 - 5}{3} \quad \rightarrow \quad -y = \frac{-17}{3} \quad \rightarrow \quad y = \frac{17}{3}$$

A solução do sistema é o par $\left(\frac{5}{3}; \frac{17}{3}\right)$.

Verificação

$$x - y = -4 \quad \rightarrow \quad \frac{5}{3} - \frac{17}{3} = -4 \quad \rightarrow \quad \frac{-12}{3} = -4 \quad \text{(verdadeiro)}$$

$$2x + y = 9 \quad \rightarrow \quad 2 \cdot \frac{5}{3} + \frac{17}{3} = 9 \quad \rightarrow \quad \frac{10}{3} + \frac{17}{3} = 9 \quad \rightarrow \quad \frac{27}{3} = 9 \quad \text{(verdadeiro)}$$

Usando um artifício de cálculo

Vamos resolver o sistema abaixo pelo método da adição:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x + 3y = 1 \end{cases}$$

Se somarmos as equações do jeito que estão, não conseguiremos **anular** um dos termos. Por isso, vamos usar um artifício de cálculo:

- primeiro, multiplicamos a 1ª equação por +2;
- depois, multiplicamos a 2ª equação por –3.

O sistema sofrerá a seguinte transformação:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \quad \xrightarrow{\times\ 2} \quad 6x + 4y = 8 \\ 2x + 3y = 1 \quad \xrightarrow{\times\ -3} \quad -6x - 9y = -3 \end{cases}$$

Agora, podemos somar o sistema:

$$\begin{array}{r} 6x + 4y = 8 \\ -\ 6x - 9y = -3 \quad + \\ \hline -\ 5y = 5 \end{array} \quad \rightarrow \quad y = -1$$

Para obter o valor de **x**, devemos substituir o valor de **y** em uma das equações:

$2x + 3y = 1$
$2x + 3\,(-1) = 1$
$2x - 3 = 1$
$2x = 4 \quad \rightarrow \quad x = 2$

Portanto, a solução do sistema é o par: (2; –1).

Verificação

$3x + 2y = 4 \rightarrow 3 \cdot 2 + 2 \cdot (-1) = 4 \rightarrow 6 - 2 = 4$ (verdadeiro).
$2x + 3y = 1 \rightarrow 2 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) = 1 \rightarrow 4 - 3 = 1$ (verdadeiro).

Observação: Você deve ter percebido que o artifício de cálculo, usado para resolver esse sistema, permitiu que a variável **x** desaparecesse. Isso ocorreu porque a variável **x**, nas duas equações, ficou com coeficientes simétricos.

Exercícios

Exercício 1
Resolva o sistema por substituição:

$3x + 5y = 20$
$2x + y = 11$

Exercício 2
Resolva os sistemas por adição:

a) $\begin{cases} x + y = 10 \\ x - y = -6 \end{cases}$ **b)** $\begin{cases} 5x - 2y = 1 \\ 7x + 2y = 11 \end{cases}$

Exercício 3
Resolva os sistemas:

a) $\begin{cases} x - y = -3 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 4x + y = 3 \\ 2x - 2y = -1 \end{cases}$

Exercício 4
Verifique se o par (1; 2) é solução para o sistema: $\begin{cases} 10x - 2y = 6 \\ x + 5y = 11 \end{cases}$

Exercício 5
Escreva um sistema que corresponda à seguinte situação:

Um armário custa o triplo de uma mesa. Os dois juntos custam R$ 120,00.

Exercício 6
Resolva o sistema do Exercício 5.