

Gráfico de um sistema

Introdução

Na Aula 68, você aprendeu a resolver algebricamente um sistema do 1º grau. Nesta aula, você vai aprender a resolver **graficamente** um sistema de equações do 1º grau.

Mas, antes, vamos recapitular algumas noções que, provavelmente, você já conhece.

Uma equação do 1º grau com duas variáveis pode ser representada no plano cartesiano, isto é, graficamente, por meio de uma reta.

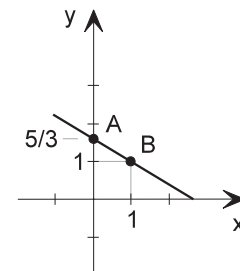
Para a determinação da reta bastam dois pontos. Cada ponto é formado por um par ordenado $(x; y)$, onde x é a abscissa e y é a ordenada do ponto.

Os valores de x e de y podem ser estabelecidos em uma tabela, como mostra o exemplo.

EXEMPLO 1

Represente graficamente $2x + 3y = 5$

	x	$y = \frac{5 - 2x}{3}$	$(x; y)$
A	0	$\frac{5}{3}$	$(0; \frac{5}{3})$
B	1	1	$(1; 1)$



Nossa aula

Nesta aula, vamos estudar apenas os sistemas de duas equações do 1º grau com duas variáveis.

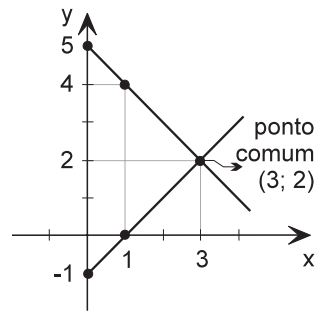
EXEMPLO 2

Construa num mesmo plano cartesiano as retas $x - y = 1$ e $x + y = 5$

Primeiro montamos as tabelas:

x	$y=x-1$	(x;y)
0	-1	(0;-1)
1	0	(1;0)

x	$y=5-x$	(x;y)
0	5	(0;5)
1	4	(1;4)
2	3	(2;3)
3	2	(3;2)



As duas retas se cruzam no ponto (3; 2). Isso significa que o ponto (3; 2) é comum às duas retas, ou seja, é o ponto de interseção das duas retas. Logo o par ordenado (3; 2) corresponde à solução do sistema formado por essas duas equações.

Veja:

$$\begin{cases} x - y = 1 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

Por adição temos:

$$\begin{array}{r} x - y = 1 \\ x + y = 5 \quad + \\ \hline 2x = 6 \end{array} \rightarrow x = 3 \rightarrow y = 2$$

Solução: (3; 2)

E assim podemos verificar que o ponto (3; 2), ponto de interseção das duas retas é a solução gráfica do sistema.

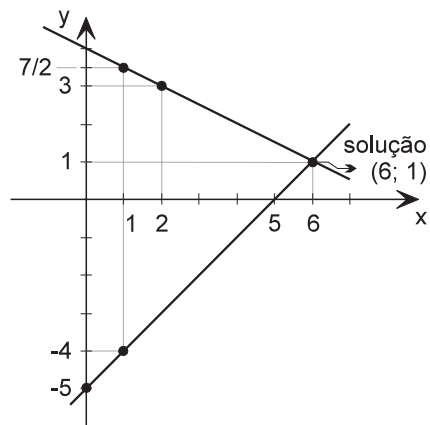
EXEMPLO 3

Resolva graficamente o sistema:

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

x	$y=x-5$	(x;y)
0	-5	(0;-5)
1	-4	(1;-4)

x	$y = \frac{8-x}{2}$	(x;y)
0	$\frac{7}{2} = 3,5$	(0;3,5)
2	3	(2;3)



Agora, vamos verificar esse resultado, achando algebricamente a solução:

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ x + 2y = 8 \end{cases}$$

Por substituição temos:

$$x = 5 + y \rightarrow 5 + y + 2y = 8 \rightarrow 3y = 3$$

$$y = 1 \rightarrow x = 6$$

Solução: (6; 1)

Podemos concluir que a solução de um sistema do 1º grau com duas variáveis é representada graficamente pela interseção de duas retas.

Muitas vezes, a solução de um sistema pode nos levar a resultados curiosos. Nesse caso, a solução gráfica pode ser um excelente recurso para entender a solução.

EXEMPLO 4

Resolva algebricamente o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

Usando um recurso do cálculo e resolvendo por adição, temos:

$$\begin{array}{rcl} 2x + y = 0 & \times (-1) & -2x - y = 0 \\ 2x + y = 3 & & \underline{2x + y = 3} + \\ & & 0 = 3 \rightarrow \text{falso} \end{array}$$

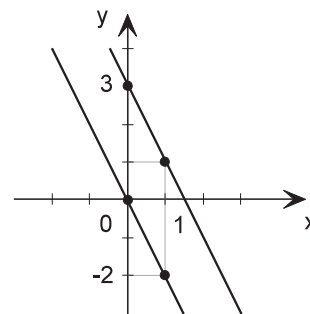
Mas, como $0 \neq 3$ (zero é diferente de 3), dizemos que chegamos a uma **identidade falsa**.

Vamos verificar qual o significado dessa identidade falsa, resolvendo graficamente o sistema:

$$\begin{cases} 2x + y = 0 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$$

x	y=-2x	(x;y)
0	0	(0;0)
1	-2	(1;-2)

x	y=3-2x	(x;y)
0	3	(0;3)
1	1	(1;1)



Observe que as retas que representam as equações que formam o sistema são **paralelas**. Logo, não há ponto de interseção entre elas, o que significa que **o sistema não tem solução**.

Um sistema indeterminado

Resolva algebricamente o sistema abaixo e, depois, verifique o significado da solução encontrada.

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$$

Por substituição, temos: $x = 3 + y$

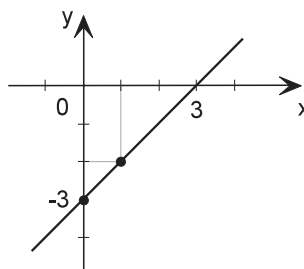
$$2x - 2y = 6 \rightarrow 2(3 + y) - 2y = 6 \quad 6 + 2y - 2y = 6 \rightarrow 6 = 6 \rightarrow (\text{verdadeiro})$$

Agora vamos resolver graficamente o sistema e verificar o significado da solução.

$$\begin{cases} x - y = 3 \\ 2x - 2y = 6 \end{cases}$$

x	y=x-3	(x;y)
0	-3	(0;-3)
1	-2	(1;-2)

x	y = $\frac{2x-6}{2}$	(x;y)
0	-3	(0;-3)
1	-2	(1;-2)



As duas equações que formam o sistema são representadas por uma **única reta**. Logo todas as soluções de uma equação são também soluções da outra equação. O que significa que há infinitas soluções, ou seja, **a solução é indeterminada**.

Exercício 1

Represente num mesmo plano cartesiano as retas $2x + 3y = 11$ e $11x + 4y = 22$.

Exercícios

Exercício 2

Determine a solução do sistema $\begin{cases} 2x + 3y = 11 \\ x - y = -2 \end{cases}$?

Exercício 3

Represente graficamente cada um dos sistemas a seguir e, depois, verifique a solução algebricamente.

a) $\begin{cases} x + y = 1 \\ 2x - y = 14 \end{cases}$

b) $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ 2x + y = 3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x - y = -3 \\ x + 2y = 3 \end{cases}$

d) $\begin{cases} x + y = 4 \\ 2x - 2y = 8 \end{cases}$

Exercício 4

Sejam **a** e **b** as retas que representam as equações de um sistema do 1º grau. O que podemos afirmar sobre a solução do sistema, quando:

a) **a** e **b** são retas concorrentes;

b) **a** e **b** são retas coincidentes, isto é, representam a mesma reta;

c) **a** e **b** são retas paralelas.