

Operando com potências

Introdução

Operações com potências são muito utilizadas em diversas áreas da Matemática, e em especial no cálculo algébrico. O conhecimento das propriedades operatórias da potenciação pode facilitar a resolução de cálculos com expressões algébricas, que de outra forma seriam bastante trabalhosos.

Para estudar essas propriedades, vamos antes rever algumas definições de potências com expoentes inteiros e bases reais.

Nossa aula

Potenciação, por definição, é uma forma prática e simples de se representar uma multiplicação de fatores iguais.

Na potenciação, o fator da multiplicação chama-se **base** e o número de vezes que o fator se repete é representado pelo **expoente**. Por exemplo:

- $5 \times 5 = 25 \leftrightarrow 5^2 = 25$
 2 vezes
 Onde 5 é a base e 2 é o expoente.
 Lê-se: "5 ao quadrado".
- $2 \times 2 \times 2 = 8 \leftrightarrow 2^3 = 8$
 3 vezes
 Onde 2 é a base e 3 é o expoente.
 Lê-se: "2 ao cubo".
- $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81 \leftrightarrow 3^4 = 81$
 4 vezes
 Onde 3 é a base e 4 é o expoente.
 Lê-se: "3 à 4ª potência".

De maneira geral, podemos escrever:

$$\underbrace{a \cdot a \cdot a \dots a}_{n \text{ vezes}} = a^n$$

se $n \geq 2$ (número inteiro)

Alguns casos especiais da potenciação:

- $a^1 = a$ para qualquer a
- $a^0 = 1$ se $a \neq 0$
- $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ se $a \neq 0$

Além dessas definições, convencionou-se ainda que:

$$-3^2 \text{ significa } -(3)^2 = -(3 \cdot 3) = -9 \quad \text{e}$$

$$(-3)^2 = (-3) \cdot (-3) = +9$$

Portanto:

$$-3^2 \neq (-3)^2$$

Isso nos leva a concluir que, se a base é um número negativo e está elevada a um expoente positivo, é indispensável o uso dos parênteses. Caso os parênteses não sejam utilizados o resultado encontrado poderá ser incorreto.

Vejam alguns exemplos numéricos de aplicação das propriedades vistas até aqui:

- $7^0 = 1$
- $(-2)^2 = +4$
- $6^1 = 6$
- $3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
- $-2^2 = -4$
- $\left(\frac{1}{2}\right)^{-3} = \frac{1}{(\frac{1}{2})^3} = \frac{1}{(\frac{1}{8})} = 8$

Para calcular o valor de uma potência, quase sempre precisamos efetuar a multiplicação equivalente. Assim, por exemplo, para comparar duas ou mais potências é necessário conhecer antes os seus valores. Por exemplo:

- As potências 3^{-2} e $(-3)^{-2}$ são iguais ou diferentes?

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \quad \text{e} \quad (-3)^{-2} = \frac{1}{(-3)^2} = \frac{1}{9}$$

Portanto as duas potências são iguais e podemos escrever: $3^{-2} = (-3)^{-2}$

- Qual é a maior 6^{-2} ou -6^{-2} ?

$$6^{-2} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{36} \quad \text{ou} \quad -6^{-2} = -(6 \cdot 6) = -36$$

Vimos que 6^{-2} resulta num número positivo e -6^{-2} resulta num número negativo. Todo número positivo é maior que qualquer número negativo.

Logo: $6^{-2} > -6^{-2}$.

- Qual é o número menor: $\left(-\frac{1}{2}\right)^5$ ou $\left(-\frac{1}{2}\right)^3$?
 $\left(-\frac{1}{2}\right)^5 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{32}$ e
 $\left(-\frac{1}{2}\right)^3 = \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{8}$

Se as frações fossem positivas, a menor seria a que tem o maior denominador, portanto $\frac{1}{32}$.

Como as frações são negativas o resultado é ao contrário e teremos como resposta: $>$

Sugestão: represente as frações obtidas na reta numérica.

Para efetuar operações com potências, também é necessário calcular antes o valor de cada potência. Por exemplo:

- $3^2 + 2^3 = 9 + 8 = 17$
- $5^3 - 7^2 = 125 - 49 = 76$
- $2^3 \cdot 3^2 = 8 \cdot 9 = 72$
- $4^2 \div 2^3 = 16 \div 8 = 2$

Propriedades da potenciação

Vamos apresentar agora as propriedades operatórias, no caso especial das potências de bases iguais. Nesses casos, podemos resolver a multiplicação sem efetuar as potências e obteremos o resultado em forma de potência.

Multiplicação de potências de bases iguais

- $2^4 \times 2^2 = 2^{4+2} = 2^6$ porque $2^4 \times 2^2 = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2}_{4 \text{ vezes}} \times \underbrace{2 \times 2}_{2 \text{ vezes}} = 2^6$
- $7^5 \times 7^{-3} = 7^{5+(-3)} = 7^{5-3} = 7^2$

Generalizando, para multiplicar potências de bases iguais, repetimos a base e somamos os expoentes.

$$\boxed{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

Divisão de potências de bases iguais

- $5^4 \div 5^2 = \frac{5^4}{5^2} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}{5 \cdot 5} = 5 \cdot 5 = 5^2$
- $7^3 \div 7^2 = 7^{3-2} = 7^1$
- $9^4 \div 9^6 = 9^{4-6} = 9^{-2}$

Então, para dividir potências de bases iguais, repetimos a base e subtraímos os expoentes.

$$a^m \div a^n = a^{m-n}$$

Potenciação de potência

- $(3^2)^3 = \cancel{(3^2)} \cdot \cancel{(3^2)} \cdot \cancel{(3^2)} = 3^{2 \times 3} = 3^6$
- $(2^{-2})^4 = \left(\frac{1}{2^2}\right)^4 = \frac{1}{2^8} = 2^{-8}$

Então, para elevar uma potência a um expoente, repetimos a base e multiplicamos os expoentes.

$$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$$

Distributividade da potenciação em relação à multiplicação

- $(2 \times 3)^3 = \cancel{(2 \times 3)} \cdot \cancel{(2 \times 3)} \cdot \cancel{(2 \times 3)} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 8 \cdot 27$
- $(5 \times 7)^{-2} = \frac{1}{(5 \times 7)^2} = \frac{1}{5^2 \times 7^2} = 5^{-2} \times 7^{-2}$

Para elevar um produto a um expoente, elevamos cada fator ao mesmo expoente.

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

Distributividade da potenciação em relação à divisão

$$(7 \div 3)^2 = \underbrace{\left(\frac{7}{3}\right) \cdot \left(\frac{7}{3}\right)}_{2 \text{ vezes}} = \frac{7 \cdot 7}{3 \cdot 3} = \frac{7^2}{3^2} = 7^2 \div 3^2$$

2 vezes

$$\left(\frac{4}{5}\right)^3 = \frac{4^3}{5^3}$$

Para elevarmos um quociente (ou uma fração) a um expoente, elevamos o dividendo e o divisor (ou o numerador e o denominador) ao mesmo expoente.

$$(a \div b)^m = a^m \div b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Aplicações

Como já foi dito no início da aula, uma das maiores aplicações das propriedades operatórias das potências de bases iguais está no cálculo algébrico. Na Aula 62, efetuamos a adição e a subtração de expressões algébricas. Vejamos nos exemplos, a multiplicação e a divisão dessas expressões e verificaremos o uso constante das propriedades estudadas.

$$\bullet x^2 \cdot x^3 \cdot x^5 = x^{10}$$

$$\bullet y^2 \cdot (y^2 + y + 1) = y^2 \cdot y^2 + y^2 \cdot y + y^2 \cdot 1 = y^4 + y^3 + y^2$$

$$\bullet (-2xy)^3 = (-2)^3 \cdot x^3 \cdot y^3 = -8x^3y^3$$

$$\bullet (x^2)^3 \cdot x^{-4} = x^6 \cdot x^{-4} = x^{7-4} = x^3$$

$$\bullet (2x^5 + 3x^4) \cdot x^3 = (2x^5 \cdot x^3) + (3x^4 \cdot x^3) = 2x^8 + 3x^7$$

$$\bullet \frac{(xy)^4}{(x^2y)^{-1}} = \frac{(x^4y^4)}{(x^2y)^{-1}} = \frac{x^4 \cdot y^4}{x^{-2} \cdot y^{-1}} = \frac{x^4}{x^{-2}} \cdot \frac{y^4}{y^{-1}} = x^{4-(-2)} \cdot y^{4-(-1)} = x^6 \cdot y^5$$

As propriedades podem ser usadas em expressões numéricas como uma forma de simplificação dos cálculos. Veja:

- $2 \cdot 128 \cdot 32 = 2 \cdot 2^7 \cdot 2^5 = 2^{13}$
- $(4^3)^2 \div 16 = 4^6 \div 4^2 = 4^4$
- $\frac{5^2 \cdot 5^3}{625} = \frac{5^2 \cdot 5^3}{5^4} = \frac{5^5}{5^4} = 5^1 = 5$

Exercícios

Exercício 1

Verifique se as sentenças são verdadeiras (V) ou falsas (F):

a) () $4^{-2} = -16$

b) () $7^{-3} \cdot 7^3 = 1$

c) () $\left(\frac{1}{x}\right)_{\text{HK}} = x^2$

d) () $-3^{-2} = \frac{1}{9}$

Exercício 2
Qual é a maior $\left(\frac{-1}{5}\right)_{\text{HK}}^2$ ou $\left(\frac{-1}{5}\right)_{\text{HK}}^3$?

Exercício 3

Se $2^x = 4$, qual é o valor de 2^{1+x} ? E qual o valor de 2^{3-x} ?

Exercício 4

Efetue as operações nas seguintes expressões algébricas:

a) $x^3 \cdot (x + x^2 + x^4) =$

b) $(7x^5 - 8x^4) \div x^4 =$

c) $(6x^3 + 3x^2) \div (-3x) =$

d) $(x^2 + y) \cdot xy =$