

# Fatoração

## Introdução

A palavra **fatoração** nos leva a pensar em **fatores**, e, como já sabemos, fatores são os elementos de uma multiplicação. Fatorar um número, portanto, é escrevê-lo na forma de uma multiplicação de fatores. Por exemplo, o número 16 pode ser escrito como uma multiplicação de fatores, de várias maneiras:

$$\begin{aligned} 16 &= 2 \times 8 \\ 16 &= 4 \times 4 \\ 16 &= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \quad \text{ou ainda } 16 = 2^4 \end{aligned}$$

No caso de uma expressão numérica, cujas parcelas têm um fator comum, podemos fatorá-la, assim:

$$\underbrace{7 \times 2 + 5 \times 2}_{\text{soma de 2 parcelas}} = \underbrace{(7 + 5) \times 2}_{\text{produto de dois fatores}} \rightarrow \text{forma fatorada da expressão numérica}$$

Vamos aprender, nesta aula, a fatoração de expressões algébricas, que é muito utilizada para a simplificação dos cálculos algébricos.

## Nossa aula

Vamos considerar um terreno formado por dois lotes de comprimentos diferentes e de mesma largura:



Podemos calcular a área total do terreno de duas maneiras diferentes:

- Calculando a área de cada lote e depois somando-as.
- Somando os comprimentos dos dois lotes e calculando diretamente a área total do terreno.

As duas maneiras dão o mesmo resultado; portanto, podemos escrever:

Área do lote I:  $ax$  } Somando as duas áreas:  $ax + bx$   
 Área do lote II:  $bx$  }

Comprimento total do terreno:  $(a + b)$

Área do terreno:  $(a + b) \times$

$$\text{Logo: } \underline{ax + bx} = \underline{(a + b) \times}$$

**soma de duas parcelas**      **produto de dois fatores**

Portanto, sempre que numa soma de duas ou mais parcelas houver um fator comum a todas as parcelas (como o  $x$  em  $ax + bx$ ), podemos fatorar essa expressão, e esse fator comum será um dos fatores da expressão após ser fatorada.

Como fazer para descobrir o outro fator da expressão fatorada?

Basta dividir a expressão que vai ser fatorada pelo fator comum.

### EXEMPLO 1

Fatore a expressão:  $3xy + 6x$ . Temos que 3 e  $x$  são fatores comuns às duas parcelas. Podemos, então, escrever a expressão assim:

$$\begin{aligned} 3xy + 6x &= 3x \cdot \left( \frac{3xy}{3x} + \frac{6x}{3x} \right) \\ &= 3x \cdot \left( \frac{\cancel{3}xy}{\cancel{3}x} + \frac{2\cancel{6}x}{\cancel{3}x} \right) \end{aligned} \quad \text{simplificando as frações}$$

$$3xy + 6x = 3x(y + 2)$$

Dizemos que o fator  $3x$  foi colocado “em evidência”, isto é, “em destaque”. Na prática, as divisões feitas dentro dos parênteses são feitas “de cabeça”.

### EXEMPLO 2

Fatore  $2a^2b - 4ab^2$ .

Os fatores comuns são 2,  $a$  e  $b$ .

Colocando **2.a.b** “em evidência”, temos:

$$2a^2b - 4ab^2 = 2ab \cdot (a - 2b) \quad \text{divisão feita “de cabeça”}$$

Para ter certeza de que a divisão foi feita corretamente, você pode fazer a verificação assim:

$$2ab(a - 2b) = 2a^2b - 4ab^2$$

Ou seja, foi usada a propriedade distributiva da multiplicação para verificar se a fatoração está correta.

Podemos também fatorar as expressões algébricas que são resultados de produtos conhecidos, como os produtos notáveis estudados na aula anterior.

A expressão  $a^2 - b^2$  é resultado do produto  $(a + b) \cdot (a - b)$ ; então podemos fatorar toda expressão da seguinte maneira:

- $$4x^2 - 9 = (2x + 3)(2x - 3) \rightarrow \text{forma fatorada}$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ (2x)^2 & & 3^2 \end{array}$$
- $$36a^2 - 1 = (6a + 1)(6a - 1)$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ (6a)^2 & & 1^2 \end{array}$$
- $$16 - \frac{x^2}{25} = \left(4 + \frac{x}{5}\right) \cdot \left(4 - \frac{x}{5}\right)$$

$$\begin{array}{ccc} \Downarrow & & \Downarrow \\ 4^2 & & \left(\frac{x}{5}\right)^2 \end{array}$$

Os outros dois produtos notáveis resultam em trinômios quadrados perfeitos. Como os dois casos diferem apenas num sinal, podemos escrever os dois juntos usando os dois sinais ao mesmo tempo, assim:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

Que se lê:

“O quadrado da soma ou da diferença de dois termos é igual ao quadrado do 1º termo, mais ou menos duas vezes o 1º pelo 2º termo, mais o quadrado do 2º termo.”

Então, sempre que tivermos um trinômio quadrado perfeito podemos fatorá-lo escrevendo-o na forma de um quadrado da soma ou da diferença de dois termos. Por exemplo:

- $$x^2 + 8x + 16$$

$$\begin{array}{ccc} \text{quadrado} & & \text{quadrado} \\ \text{de } x & \uparrow & \text{de } 4 \\ \backslash 2 & \cdot x & \cdot 4 / \end{array}$$

Então, podemos escrever:

$$x^2 + 8x + 16 = (x + 4)^2 \rightarrow \text{forma fatorada}$$

•  $a^2 + 8a + 9$

$\downarrow$                        $\uparrow$                        $\downarrow$   
**quadrado**                      **quadrado**  
**de a**                                      **de 3**

$\backslash$                        $/$   
 $2 \cdot a \cdot 3$

$6a \neq 8a$

Nesse caso, o trinômio não é quadrado perfeito e, portanto, não pode ser fatorado.

•  $x^4 - 2x^2 + 1$

$\downarrow$                        $\downarrow$   
 $(x^2)^2$                        $1^2$

$\backslash$                        $/$   
 $2 \cdot x^2 \cdot 1$

$2x^2$

O trinômio é quadrado perfeito e vamos escrevê-lo na forma fatorada:

$$x^4 - 2x^2 + 1 = (x^2 - 1)^2$$

### Exercício 1

Calcule o valor de  $5 \cdot 36 + 5 \cdot 24 + 5 \cdot 15$ , fatorando antes a expressão.

### Exercícios

### Exercício 2

Fatore as expressões algébricas, colocando o fator comum em evidência:

a)  $x^2 + 11x$

b)  $a^2b + 4ab + ab^2$

### Exercício 3

Verifique se o trinômio  $x^2 - 12x + 64$  é um trinômio quadrado perfeito, justificando a resposta.

### Exercício 4

Fatore o trinômio  $a^2x^2 + 2ax + 1$ .

### Exercício 5

Fatore a expressão  $x^4 - 16$  e, se ainda for possível, fatoro o resultado obtido. Isso quer dizer fatorar completamente a expressão.

### Exercício 6

Simplifique a fração  $\frac{a^2 - 10a + 25}{a - 5}$ , fatorando antes o numerador da fração.

### Exercício 7

Complete o trinômio quadrado perfeito com o termo que está faltando:

$$x^2 - \dots + 9y^2$$