

Deduzindo uma fórmula

Introdução

Na aula anterior, vimos que uma equação do 2º grau é toda equação de forma $ax^2 + bx + c = 0$, onde **a**, **b** e **c** são números reais sendo **a** $\neq 0$.

Algumas equações foram resolvidas sem a necessidade de métodos próprios: são as **equações incompletas**.

Para resolver uma **equação completa** do 2º grau, é necessário conhecer a fórmula desenvolvida pelo matemático hindu Bhaskhara, que viveu em torno de 1115 a.C., e que até hoje leva seu nome: **fórmula de Bhaskhara**. Ela foi desenvolvida e generalizada com base no método de completar o quadrado, que mostraremos nesta aula, e que foi muito usado pelo matemático árabe Al-Khowarizmi, em fins do século VIII e início do século IX.

Nossa aula

Vamos resolver equações do tipo $(ax + b)^2 = c$, onde o 1º membro é o quadrado de uma expressão e o 2º membro é um número.

EXEMPLO 1

Resolva a equação $(x + 2)^2 = 25$.

$$\sqrt{(x + 2)^2} = \pm \sqrt{25}$$

$$x + 2 = 5$$

$$x + 2 = +5$$

$$x = 5 - 2$$

$$x = 3$$

extraindo a raiz quadrada dos dois membros da equação

$$\text{ou } x + 2 = -5$$

$$x = -5 - 2$$

$$x = -7$$

A equação tem duas soluções: **3** e **-7**.

Esse exemplo nos leva a pensar que, se todas as equações do 2º grau pudessem ser escritas nessa forma, então sua resolução seria muito simples.

Para isso, precisaríamos ter sempre no 1º membro da equação um trinômio quadrado perfeito e escrevê-lo na forma fatorada, como queremos.

Vejam, agora, como transformar um trinômio qualquer num trinômio quadrado perfeito, usando o método de completar o quadrado.

EXEMPLO 2

Resolva a equação $x^2 + 8x - 9 = 0$.

A equação também pode ser escrita assim: $x^2 + 8x = 9$

Qual o termo que devemos somar ao 1º membro, $(x^2 + 8x)$ para obter um quadrado perfeito?

Como $8x = 2 \cdot 4 \cdot x$, devemos acrescentar 4^2 , ou seja, 16 ao 1º membro. Mas, como a equação é uma igualdade devemos somar 16 também ao 2º membro:

$$x^2 + 8x + 16 = 9 + 16$$

Fatorando o 1º membro:

$$(x + 4)^2 = 25$$

$$x + 4 = \pm\sqrt{25}$$

$$x + 4 = \pm 5$$

$$x + 4 = +5 \rightarrow x = 5 - 4 \rightarrow x = 1$$

$$x + 4 = -5 \rightarrow x = -5 - 4 \rightarrow x = -9$$

A fórmula obtida por Bhaskhara, que resolve qualquer equação do 2º grau, é baseada no método de completar o quadrado. Aqui não faremos esse cálculo e usaremos a fórmula diretamente.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Fórmula de Bhaskhara

A expressão $b^2 - 4ac$ é muito importante na resolução da equação do 2º grau. Por ser ela que “discrimina” o número de soluções da equação, é chamada **discriminante** da equação. Podemos representar o discriminante pela letra grega Δ (delta).

O discriminante indica o número de soluções da equação do seguinte modo:

- Se $b^2 - 4ac < 0$, a equação **não** tem soluções reais.
- Se $b^2 - 4ac = 0$, a equação tem **uma** solução real.
- Se $b^2 - 4ac > 0$, a equação tem **duas** soluções reais.

Vamos, então, aplicar a fórmula de Bhaskhara na resolução de uma equação do 2º grau.

EXEMPLO 3

Resolva a equação $2x^2 + 5x - 3 = 0$.

Em primeiro lugar identificaremos os coeficientes da equação:

$$a = 2 \qquad b = 5 \qquad e \qquad c = -3$$

Em seguida, vamos calcular o valor de $\Delta = b^2 - 4ac$:

$$\begin{aligned} \Delta &= 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3) \\ \Delta &= 25 + 24 \rightarrow \Delta = 49 \end{aligned}$$

Como $\Delta > 0$, sabemos que a equação tem **duas** soluções reais.

Vamos aplicar a fórmula:

$$\begin{aligned} x &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \\ x &= \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm 7}{4} \end{aligned} \quad \begin{aligned} \nearrow & \quad x_1 = \frac{-5 - 7}{4} = \frac{-12}{4} \rightarrow x_1 = -3 \\ \searrow & \quad x_2 = \frac{-5 + 7}{4} = \frac{2}{4} \rightarrow x_2 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

As soluções da equação $2x^2 + 5x - 3 = 0$ são **-3** e $\frac{1}{2}$.

EXEMPLO 4

Resolva a equação $2x^2 + 5x + 4 = 0$.

$$a = 2 \qquad b = 5 \qquad e \qquad c = 4$$

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac \\ \Delta &= 5^2 - 4 \cdot 2 \cdot 4 = 25 - 32 \rightarrow \Delta = -7 \end{aligned}$$

Como $\Delta < 0$, a equação **não** tem solução real.

EXEMPLO 5

Resolva a equação $x^2 - 6x + 9 = 0$.

$$a = 1 \qquad b = -6 \qquad e \qquad c = 9$$

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 9$$

$$\Delta = 36 - 36 \rightarrow \Delta = 0$$

Como $\Delta = 0$, a equação tem uma solução real. Vamos calculá-la:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$$

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 0}{2} = \frac{6}{2} \rightarrow x = 3$$

A solução da equação $x^2 - 6x + 9 = 0$ é 3.

Exercício 1

Resolva a equação $(3x - 2)^2 = 4$.

Exercícios**Exercício 2**

Resolva as equações usando a fórmula de Bhaskhara:

a) $8x^2 - 2x - 1 = 0$

b) $3x^2 - 8x + 10 = 0$

c) $-x^2 - 2x + 3 = 0$

*** Exercício 3**

Considere as expressões $x^2 - 5x - 6$ e $2x - 16$. Encontre os valores reais de x para os quais:

a) a primeira expressão dá 0;

b) a segunda expressão dá 0;

c) a primeira expressão dá 8;

d) a segunda expressão dá 8;

e) as duas expressões têm valores iguais.

* O Exercício 3 foi extraído do livro Matemática na medida certa (8ª série), de Jakubo e Lellis, Editora Scipione.