

Resolvendo sistemas

Introdução

Nas aulas anteriores aprendemos a resolver equações de 1º grau. Cada equação tinha uma incógnita, em geral representada pela letra x .

Vimos também que qualquer equação com duas incógnitas (x e y) não pode ser resolvida porque, para cada valor de x , podemos calcular um valor diferente para y . Por exemplo, na equação $2x + y = 20$, se fizermos $x = 3$ e $x = 6$ então teremos, respectivamente:

$$2 \cdot 3 + y = 20 \rightarrow y = 20 - 6 = 14$$

$$2 \cdot 6 + y = 20 \rightarrow y = 20 - 12 = 8$$

e assim por diante. Vemos então que, para saber os valores corretos de x e y precisamos de uma outra informação a respeito das nossas incógnitas.

Se conseguimos obter duas equações a respeito das mesmas incógnitas, temos um **sistema**.

Por exemplo:

$$\begin{cases} 2x + y = 20 \\ 3x - y = 10 \end{cases}$$

é um sistema de duas equações nas incógnitas x e y . É possível resolver esse sistema, ou seja, é possível descobrir quais são os valores de x e y que satisfazem às duas equações simultaneamente.

Você pode verificar que $x = 6$ e $y = 8$ é a solução do nosso sistema, substituindo esses valores nas duas equações, temos:

$$\begin{cases} 2 \cdot 6 + 8 = 20 \\ 3 \cdot 6 - 8 = 10 \end{cases}$$

Nesta aula vamos aprender a resolver sistemas de duas equações com duas incógnitas.

Mas, antes, vamos perceber que, para serem resolvidos, muitos problemas dependem dos sistemas.

Para que você perceba que os sistemas aparecem em problemas simples, imagine a situação a seguir.

Pedro e Paulo conversam despreocupadamente quando chega José, um amigo comum, que está para se aposentar. José fala sobre as idades das pessoas que se aposentam e percebe que os dois amigos ainda estão longe da aposentadoria. Então, ele pergunta:

- Que idade vocês têm?

Pedro, o mais velho, percebendo um pequeno erro na pergunta, responde:

- Nós temos 72 anos.

A conversa, então, segue assim:

José - *Como? Você está brincando comigo. Esse aí não passa de um garoto e você certamente não chegou aos 50.*

Pedro - *Da maneira que você perguntou, eu respondi. Nós, eu e Paulo, temos juntos 72 anos.*

José - *Está bem, eu errei. Eu devia ter perguntado que **idades** vocês têm. Mas, pela sua resposta, eu não consigo saber as idades de cada um.*

Pedro - *É claro que não. Você tem duas coisas desconhecidas e apenas uma informação sobre elas. É preciso que eu lhe diga mais alguma coisa e, aí sim, você determina nossas idades.*

José - *Diga.*

Pedro - *Vou lhe dizer o seguinte. A minha idade é o dobro da de Paulo. Agora, José, você tem duas coisas desconhecidas, mas tem também duas informações sobre elas. Com a ajuda da matemática, você poderá saber nossas idades.*

Vamos pensar um pouco na situação apresentada. José tem duas coisas a descobrir: a idade de Pedro e a idade de Paulo. Essas são suas incógnitas. Podemos então dar nomes a essas incógnitas:

idade de Pedro = x

idade de Paulo = y

A primeira informação que temos é que os dois juntos possuem 72 anos. Então, nossa primeira equação é:

$$x + y = 72$$

A outra informação que temos é que a idade de Pedro é o dobro da idade de Paulo. Com isso, podemos escrever a nossa segunda equação:

$$x = 2y$$

Essas duas equações formam o nosso sistema:

$$\begin{cases} x + y = 72 \\ x = 2y \end{cases}$$

Esse sistema, por simplicidade, pode ser resolvido sem necessidade de nenhuma técnica especial. Se a segunda equação nos diz que x é igual a $2y$, então substituiremos a letra x da primeira equação por $2y$. Veja.

$$\begin{aligned}x+y &= 72 \\2y+y &= 72 \\3y &= 72 \\ \frac{3y}{3} &= \frac{72}{3} \\ y &= 24\end{aligned}$$

Como $x = 2y$, então $x = 2 \cdot 24 = 48$. Assim, concluímos que Pedro tem 48 anos e que Paulo tem 24.

Nem sempre os sistemas são tão simples assim. Nesta aula, vamos aprender dois métodos que você pode usar na solução dos sistemas.

O método da substituição

O sistema do problema que vimos foi resolvido pelo método da substituição. Vamos nos deter um pouco mais no estudo desse método prestando atenção na técnica de resolução.

Agora, vamos apresentar um sistema já pronto, sem a preocupação de saber de onde ele veio. Vamos, então, resolver o sistema:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 22 \\ 4x - y = 11 \end{cases}$$

Para começar, devemos isolar uma das letra em qualquer uma das equações. Observando o sistema, vemos que o mais fácil é isolar a incógnita y na segunda equação; assim:

$$\begin{aligned}4x - y &= 11 \\ -y &= 11 - 4x \\ y &= -11 + 4x\end{aligned}$$

Isso mostra que o valor de y é igual a $4x - 11$. Assim, podemos trocar um pelo outro, pois são iguais. Vamos então substituir y por $4x - 11$ na primeira equação.

$$\begin{aligned}3x + 2y &= 22 \\ 3x + 2(4x - 11) &= 22\end{aligned}$$

Temos agora uma equação com uma só incógnita, e sabemos o que temos de fazer para resolvê-la:

$$\begin{aligned}3x + 2(4x - 11) &= 22 \\ 3x + 2 \cdot 4x - 2 \cdot 11 &= 22 \\ 3x + 8x &= 22 + 22 \\ 11x &= 44 \\ \frac{11x}{11} &= \frac{44}{11} \\ x &= 4\end{aligned}$$

Já temos o valor de x . Repare que logo no início da solução tínhamos concluído que $y = -11 + 4x$. Então, para obter y , basta substituir x por 4.

$$\begin{aligned} y &= -11 + 4x \\ y &= -11 + 4 \cdot 4 \\ y &= -11 + 16 \\ y &= 5 \end{aligned}$$

A solução do nosso sistema é, portanto, $x = 4$ e $y = 5$.

Observações - Ao resolver um sistema, é sempre aconselhável conferir a resposta encontrada para ver se não erramos na solução. Os valores de x e de y encontrados estarão certos se eles transformarem as duas equações em igualdades verdadeiras.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 22 \\ 4x - y = 11 \end{cases} \quad x = 4, y = 5$$

$$\begin{aligned} 3 \cdot 4 + 2 \cdot 5 &= 22 \rightarrow \text{certo} \\ 4 \cdot 4 - 5 &= 11 \rightarrow \text{certo} \end{aligned}$$

Tudo confere. Os valores encontrados estão corretos.

Outra coisa que desejamos esclarecer é que isolamos a incógnita y na segunda equação porque isso nos pareceu mais simples.

No método da substituição, você pode isolar qualquer uma das duas incógnitas em qualquer das equações e, depois, substituir a expressão encontrada na outra equação.

O método da adição

Para compreender o método da adição, vamos recordar inicialmente o que significa somar duas igualdades membro a membro. Se temos:

$$\begin{aligned} A &= B \\ &e \\ C &= D \end{aligned}$$

podemos somar os dois lados esquerdos e os dois lados direitos, para concluir:

$$A + C = B + D$$

Considere agora o seguinte problema.

“Encontrar 2 números, sabendo que sua soma é 27 e que sua diferença é 3.”

Para resolvê-lo, vamos chamar nossos números desconhecidos de x e y . De acordo com o enunciado, temos as equações:

$$\begin{cases} x + y = 27 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

Veja o que acontece quando somamos membro a membro as duas equações:

$$\begin{array}{r} x + y = 27 \\ x - y = 3 \quad + \\ \hline x + x + y - y = 27 + 3 \\ 2x = 30 \\ \frac{2x}{2} = \frac{30}{2} \\ x = 15 \end{array}$$

Encontramos o valor de x . Para encontrar o valor de y vamos substituir x por **15** em qualquer uma das equações. Por exemplo, na segunda:

$$\begin{array}{r} 15 - y = 3 \\ -y = 3 - 15 \\ -y = -12 \\ y = 12 \end{array}$$

A solução do nosso problema é, portanto, $x = 15$ e $y = 12$.

O método da adição consiste em somar membro a membro as duas equações, com o objetivo de eliminar uma das incógnitas. No sistema que resolvemos, a incógnita y foi eliminada quando somamos membro a membro as duas equações. Mas isso freqüentemente não acontece dessa forma tão simples. Em geral, devemos ajustar o sistema antes de somar.

Vamos mostrar a técnica que usamos resolvendo o seguinte sistema:

$$\begin{cases} 8x + 3y = 21 \\ 5x + 2y = 13 \end{cases}$$

Para começar, devemos escolher qual das duas incógnitas vamos eliminar. Por exemplo, o y será eliminado.

Observe que, multiplicando toda a primeira equação por **2** e toda a segunda equação por **3**, conseguimos tornar os coeficientes de y iguais.

$$\begin{cases} 8x + 3y = 21 & (\times 2) \\ 5x + 2y = 13 & (\times 3) \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 16x + 6y = 42 \\ 15x + 6y = 39 \end{cases}$$

Para que o y seja eliminado, devemos trocar os sinais de uma das equações e depois somá-las membro a membro.

Veja:

$$\begin{array}{r} 16x + 6y = 42 \\ -15x - 6y = -39 \quad + \\ \hline 16x - 15x + \cancel{6y} - \cancel{6y} = 42 - 39 \\ x = 3 \end{array}$$

Em seguida, substituímos esse valor em qualquer uma das equações do sistema. Por exemplo, na primeira.

$$8 \cdot 3 + 3y = 21$$

$$24 + 3y = 21$$

$$3y = 21 - 24$$

$$3y = -3$$

$$\frac{3y}{3} = \frac{-3}{3}$$

$$y = -1$$

A solução do nosso sistema é, portanto, $x = 3$ e $y = -1$

Você agora deve praticar fazendo os exercícios propostos. Procure resolver cada sistema pelos dois métodos para que, depois, você possa decidir qual deles é o de sua preferência. Não se esqueça também de conferir as respostas.

Exercícios

Exercício 1

$$\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + 5y = 13 \end{cases}$$

Exercício 2

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ x + 3y = 15 \end{cases}$$

Exercício 3

$$\begin{cases} 3x + y = 13 \\ 2x - y = 12 \end{cases}$$

Exercício 4

$$\begin{cases} 2x + 7y = 17 \\ 5x - y = -13 \end{cases}$$

Exercício 5

$$\begin{cases} 2x + y = 4 \\ 4x - 3y = 3 \end{cases}$$

Exercício 6

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ 3x + 2y = 6 \end{cases}$$

Exercício 7

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 3 \\ x - y = 1 \end{cases}$$