

Sistemas resolvem problemas

Introdução

Na aula anterior, mostramos como resolver sistemas de duas equações de 1º grau com duas incógnitas. Agora vamos usar essa importante ferramenta da matemática na solução de problemas.

Em geral, os problemas são apresentados em linguagem comum, ou seja, com palavras. A primeira parte da solução (que é a mais importante) consiste em traduzir o enunciado do problema da linguagem comum para a **linguagem matemática**. Nessa linguagem, usamos os números, as operações, as letras que representam números ou quantidades desconhecidas, e as nossas sentenças são chamadas de **equações**.

Para dar um exemplo, considere a seguinte situação: uma costureira de uma pequena confecção ganha R\$ 7,00 por dia mais uma determinada quantia por cada camisa que faz. Certo dia, ela fez 3 camisas e ganhou R\$ 19,00.

Se quisermos saber quanto essa costureira ganha por cada camisa que faz devemos traduzir em linguagem matemática a situação apresentada. Vamos então representar por x a quantia que ela recebe por cada camisa. Ela faz 3 camisas e ganha R\$ 7,00 por dia, independentemente do número de camisas que faz. Se nesse dia ela ganhou R\$ 19,00, a equação que traduz o problema é:

$$7 + 3x = 19$$

Como já sabemos resolver equações e sistemas, daremos mais importância, nesta aula, à tradução do enunciado dos problemas para linguagem matemática.

Nossa aula

Agora vamos apresentar alguns problemas e suas soluções. Entretanto, procure resolver cada um antes de ver a solução. Para ajudar, incluímos algumas orientações entre o enunciado e a solução.

EXEMPLO 1

Em uma festa havia 40 pessoas. Quando 7 homens saíram, o número de mulheres passou a ser o dobro do número de homens. Quantas mulheres estavam na festa?

Pense um pouco e leia as orientações a seguir.

Orientações – A quantidade de homens e mulheres serão as nossas incógnitas. Então:

o número de homens = x

o número de mulheres = y

- Traduza em linguagem matemática a frase: “havia 40 pessoas na festa”.
- Se 7 homens saíram, quantos ficaram na festa?
- Traduza em linguagem matemática a frase: “o número de mulheres é o dobro do número de homens que ficaram na festa”.

Solução – Seguindo as nossas orientações, temos como primeira equação $x + y = 40$. Depois, se tínhamos x homens e 7 saíram, então ficaram na festa $x - 7$ homens. E, se o número de mulheres é o dobro do número de homens, podemos escrever $y = 2(x - 7)$.

O problema dado é traduzido em linguagem matemática pelo sistema:

$$\begin{cases} x + y = 40 \\ y = 2(x - 7) \end{cases}$$

Agora, vamos resolvê-lo. Como a incógnita y está isolada na segunda equação, podemos usar o método da substituição. Temos, então:

$$\begin{aligned} x + y &= 40 \\ x + 2(x - 7) &= 40 \\ x + 2x - 14 &= 40 \\ 3x &= 40 + 14 \\ 3x &= 54 \\ \frac{3x}{3} &= \frac{54}{3} \\ x &= 18 \end{aligned}$$

Substituindo esse valor na primeira equação, temos:

$$\begin{aligned} 18 + y &= 40 \\ y &= 40 - 18 \\ y &= 22 \end{aligned}$$

Na festa havia então 22 mulheres.

EXEMPLO 2

Uma omelete feita com 2 ovos e 30 gramas de queijo contém 280 calorias. Uma omelete feita com 3 ovos e 10 gramas de queijo contém também 280 calorias. Quantas calorias possui um ovo?

Pense um pouco e leia as orientações a seguir.

Orientações – A **caloria** é uma unidade de energia. Todos os alimentos nos fornecem energia em maior ou menor quantidade. Neste problema, vamos chamar de **x** a quantidade de calorias contida em um ovo. Para diversos alimentos, a quantidade de calorias é dada **por grama**. Isso ocorre porque um queijo pode ter diversos tamanhos, assim como uma abóbora pode também ter os mais variados pesos. Então, no nosso problema, vamos chamar de **y** a quantidade de calorias contidas em cada grama de queijo.

- Se cada grama de queijo possui y calorias, quantas calorias estão contidas em 30 gramas de queijo?
- Quantas calorias possuem dois ovos?
- Escreva em linguagem matemática a frase: “dois ovos mais 30 gramas de queijo possuem 280 calorias”.
- Escreva em linguagem matemática a outra informação contida no enunciado.

Solução – Vamos novamente seguir as orientações para resolver o problema. Se as nossas incógnitas estão bem definidas, não teremos dificuldade em traduzir o enunciado do problema em linguagem matemática. Temos que:

$$\begin{aligned} \text{número de calorias contidas em um ovo} &= x \\ \text{número de calorias contidas em um grama de queijo} &= y \end{aligned}$$

Portanto, se dois ovos e 30 gramas de queijo possuem 280 calorias temos a equação:

$$2x + 30y = 280$$

Da mesma forma, se três ovos e 10 gramas de queijos possuem 280 calorias podemos escrever:

$$3x + 10y = 280$$

O sistema que dará a solução do nosso problema é

$$\begin{aligned} 2x + 30y &= 280 \\ 3x + 10y &= 280 \end{aligned}$$

Repare que o problema pergunta qual é o número de calorias contidas em um ovo. Portanto, se a resposta do problema é o valor de x , podemos usar o método da adição e eliminar a incógnita y .

Observe que, multiplicando a segunda equação por 3, tornamos iguais os coeficientes de y .

Se, em seguida, mudamos todos os sinais da primeira equação, estamos prontos para eliminar a incógnita y .

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x + 30y = 280 \\ 3x + 10y = 280 \end{array} \right. \begin{array}{l} \times (-1) \\ \rightarrow \\ \times (3) \end{array} \quad \begin{array}{l} - 2x - 30y = -280 \\ \\ \hline 9x + 30y = 840 + \\ 9x - 2x = 840 - 280 \end{array}$$

$$7x = 560$$

$$\frac{7x}{7} = \frac{560}{7}$$

$$x = 80$$

Concluimos, então, que cada ovo contém 80 calorias.

Para saber mais

O corpo humano é uma máquina que necessita de combustível para funcionar bem. Quando comemos, a energia contida nos alimentos é transferida para nosso corpo. Muita energia é também gasta em todas as nossas atividades diárias, e o ideal é conseguir um equilíbrio entre o que comemos e o que gastamos. Há pessoas que comem demais. Comendo mais que o necessário, as pessoas acumulam energia em forma de gordura – o que não é bom para a saúde.

Para as atividades normais, o homem necessita de cerca de 2.200 calorias por dia, ou um pouco mais, dependendo de sua atividade. Para que você tenha uma idéia da quantidade de calorias contidas nas coisas que comemos, saiba que um pão francês de 100 gramas contém 270 calorias; um prato de arroz, feijão, bife e batatas fritas contém 900 calorias e uma feijoada completa, mais duas cervejas e sobremesa de goiabada e queijo, contém o incrível número de 2.180 calorias.

Procure, portanto, incluir sempre legumes e verduras nas refeições. Eles têm vitaminas, são bons para o processo digestivo e possuem poucas calorias.

EXEMPLO 3

Para ir de sua casa na cidade até seu sítio, João percorre 105 km com seu automóvel. A primeira parte do percurso é feita em estrada asfaltada, com velocidade de 60 km por hora. A segunda parte é feita em estrada de terra, com velocidade de 30 km por hora. Se João leva duas horas para ir de sua casa até o sítio, quantos quilômetros possui a estrada de terra?

Pense um pouco e leia as orientações a seguir.

Orientações – A velocidade de um automóvel é o número de quilômetros que ele percorre em uma hora. De uma forma geral, a distância percorrida é igual ao produto da velocidade pelo tempo de percurso.

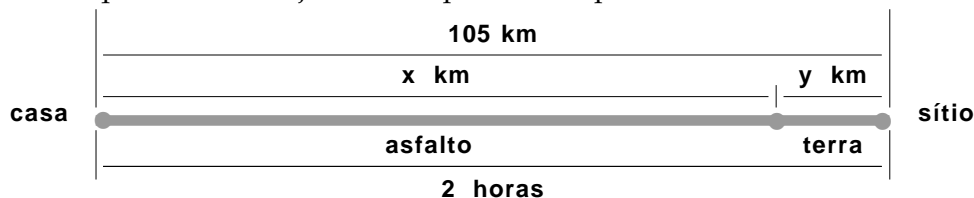
$$\text{distância} = \text{velocidade} \times \text{tempo}$$

- Estabeleça as incógnitas:

x = distância percorrida na estrada asfaltada

y = distância percorrida na estrada de terra

O esquema abaixo ajuda a compreender o problema.



- Escreva uma equação com as distâncias.
- Procure escrever uma equação com o seguinte significado: “o **tempo** em que João andou na estrada asfaltada mais o **tempo** em que ele andou na de terra é igual a duas horas”.

Solução – Mais uma vez, vamos resolver o problema seguindo as orientações. Se João andou x km na estrada asfaltada e y km na estrada de terra, então a nossa primeira equação é $x + y = 105$.

Observe novamente a relação:

$$(\text{distância}) = (\text{velocidade}) \times (\text{tempo})$$

Na primeira parte do percurso, a distância foi x , a velocidade foi **60** e o tempo gasto será chamado de t_1 . Temos, então:

$$x = 60 \cdot t_1 \quad \text{ou}$$

$$\frac{x}{60} = t_1$$

Na segunda parte do percurso a distância foi y , a velocidade foi **30** e o tempo gasto será chamado de t_2 . Temos, então:

$$y = 30 \cdot t_2 \quad \text{ou}$$

$$\frac{y}{30} = t_2$$

Como a soma dos dois tempos é igual a **2** horas, conseguimos a segunda equação:

$$\frac{x}{60} + \frac{y}{30} = 2$$

Vamos melhorar o aspecto dessa equação antes de formarmos o sistema. Multiplicando todos os termos por 60, temos:

$$\cancel{60} \cdot \frac{x}{\cancel{60}} + \cancel{60} \cdot \frac{y}{\cancel{30}} = \cancel{60} \cdot 2$$

$$x + 2y = 120$$

Temos, agora, o sistema formado pelas duas equações:

$$\begin{cases} x + y = 105 \\ x + 2y = 120 \end{cases}$$

O valor de y nesse sistema é calculado imediatamente pelo método da adição:

$$\begin{array}{r} -x - y = -105 \\ x + 2y = 120 \quad + \\ \hline 2y - y = 120 - 105 \\ y = 15 \end{array}$$

Concluimos, então, que a estrada de terra tem 15 km.

Nesta aula você viu a força da álgebra na solução de problemas. Entretanto, para adquirir segurança é preciso praticar. Para cada um dos exercícios, procure “matematizar” as situações descritas usando o método algébrico. Escolha suas incógnitas e arme as equações. Depois, resolva os sistemas e verifique se os valores encontrados estão corretos.

Exercício 1

Determine dois números, sabendo que sua soma é 43 e que sua diferença é 7.

Exercício 2

Um marceneiro recebeu 74 tábuas de compensado. Algumas com 6 mm de espessura e outras com 8 mm de espessura. Quando foram empilhadas, atingiram a altura de 50 cm. Quantas tábuas de 8mm ele recebeu?

Exercício 3

Em um estacionamento havia carros e motocicletas num total de 43 veículos e 150 rodas. Calcule o número de carros e de motocicletas estacionados.

Exercício 4

Uma empresa desejava contratar técnicos e, para isso, aplicou uma prova com 50 perguntas a todos os candidatos. Cada candidato ganhou 4 pontos para cada resposta certa e perdeu um ponto para cada resposta errada. Se Marcelo fez 130 pontos, quantas perguntas ele acertou?

Exercício 5

Certo dia, uma doceira comprou 3 kg de açúcar e 4 kg de farinha e, no total, pagou R\$ 3,20. Outro dia, ela comprou 4 kg de açúcar e 6 kg de farinha, pagando R\$ 4,50 pelo total da compra. Se os preços foram os mesmos, quanto estava custando o quilo do açúcar e o quilo da farinha?

Exercício 6

Pedro e Paulo têm juntos R\$ 81,00. Se Pedro der 10% do seu dinheiro a Paulo, eles ficarão com quantias iguais. Quanto cada um deles tem?

Exercício 7

A distância entre duas cidades A e B é de 66 km. Certo dia, às 8 horas da manhã, um ciclista saiu da cidade A, viajando a 10 km por hora em direção à cidade B. No mesmo dia e no mesmo horário um ciclista saiu da cidade B, viajando a 12 km por hora em direção à cidade A. Pergunta-se:

- A que distância da cidade A deu-se o encontro dos dois ciclistas?
- A que horas deu-se o encontro?