Recordando produtos notáveis

Introdução

Desde a aula 3 estamos usando letras para representar números desconhecidos. Hoje você sabe, por exemplo, que a solução da equação $2x + 3 = 19$ é $x = 8$, ou seja, o número 8 é o ***único*** valor que, colocado no lugar de **x**, torna a igualdade verdadeira.

Vamos agora ampliar o uso das letras. Passaremos a empregar as letras **a**, **b**, **c** etc. para representar ***números quaisquer***. Assim, **a + b** representa a soma de dois números quaisquer, **ab** representa o produto de dois números quaisquer, e assim por diante.

A igualdade

$$2 + 5 = 5 + 2$$

é correta? É claro que sim. Mas o fato de que a ordem das parcelas não altera a soma não vale somente para os números 2 e 5. Isso vale para números quaisquer. É a propriedade comutativa da adição e escreve-se assim:

$$a + b = b + a$$

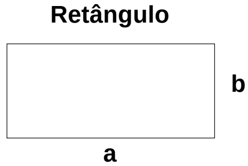
Comutar quer dizer "trocar". Uma propriedade se chama *comutativa* quando permite que dois números quaisquer troquem de posição.

Temos aí um exemplo de uma **identidade**. Em matemática, uma identidade é uma igualdade que permanece verdadeira quaisquer que sejam os valores que sejam atribuídos às letras. Nesta aula, vamos rever algumas propriedades da aula 1 (agora usando letras) e também vamos conhecer algumas identidades muito famosas da matemática.

Nossa aula

Para ilustrar as propriedades que veremos é preciso recordar como se calcula a área de um retângulo.

A área de uma figura é a medida de sua superfice. No caso do retângulo, a área é o produto de suas duas dimensões. Então, chamando de **A** a área de um retângulo de dimensões **a** e **b**, temos:

Retângulo	Área
	$A = ab$

Observe que **ab** representa o produto de dois números quaisquer. Entretanto, quando as letras forem substituídas por números, é preciso colocar um ponto (ou sinal de ×) entre eles para evitar confusões. Assim, se as medidas de certo retângulo forem **a = 5** e **b = 2**, sua área será:

$$A = ab = 5 \cdot 2 = 10$$

É claro que se as medidas **a** e **b** forem iguais, o retângulo transforma-se num quadrado, mas a forma de calcular sua área continua igual.

Quadrado | **Área**

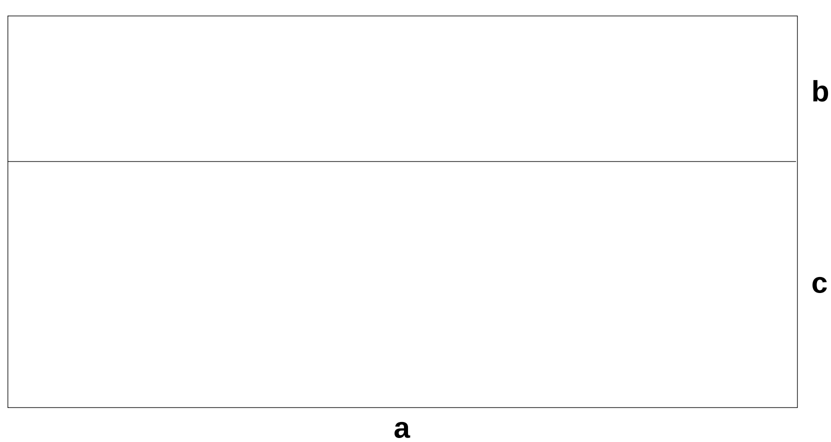
$$A = aa = a^2$$

O simbolo **a** lê-se "**a** ao quadrado" e significa o produto de um número por ele mesmo. Por exemplo: **4 = 4 · 4 = 16**.

Por enquanto, necessitamos apenas disso. O conceito de área, as unidades e as fórmulas que calculam as áreas das diversas figuras serão vistas na aula 15.

A multiplicação e a propriedade distributiva

A figura a seguir mostra dois retângulos colados. Ambos têm base **a** e as alturas são **b** e **c**.



O retângulo total tem base **a** e altura **b + c**. Então sua área é **a(b + c)**.

Por outro lado, a área do retângulo de baixo é **ab** e a área do de cima é **ac**. Somando essas duas áreas temos a área total. Logo:

$$a(b + c) = ab + ac$$

Esta é a propriedade ***distributiva*** da multiplicação. Ela tem esse nome por que a letra **a** foi distribuída pelas outras que estavam dentro do parênteses.

Vamos agora calcular algo ligeiramente mais complicado.

EXEMPLO 1

Desenvolver $(a + b)(c + d)$.

Vamos dar uma sugestão para que você tente fazer essa conta sozinho antes de ver a resposta: represente **a + b** com uma nova letra e use a propriedade que acabamos de ver.

Representaremos a soma **a + b** pela letra **m**.

$$\underbrace{(a + b)}_{m}(c + d) = m(c + d) = mc + md$$

Agora, substituímos a letra **m** pela soma **a** + b:

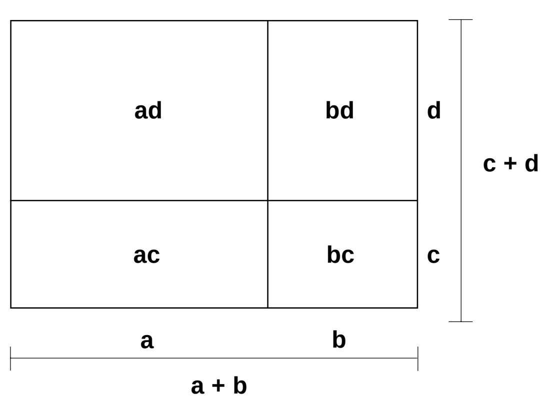
$$\begin{aligned} (a + b)(c + d) &= mc + md \\ &= (a + b)c + (a + b)d \\ &= ac + bc + ad + bd \end{aligned}$$

Concluímos, então, que:

$$(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$$

Observe a figura a seguir para visualizar o que foi demonstrado. O lado esquerdo de nossa igualdade representa a área de um retângulo cujas medidas são **a + b** e **c + d**.

Repare que este retângulo é a soma de quatro retângulos menores cujas áreas são as quatro parcelas que aparecem no lado direito da igualdade.



O quadrado de uma soma e de uma diferença

O exemplo que acabamos de ver é a base para a demonstração de uma das mais úteis identidades da matemática:

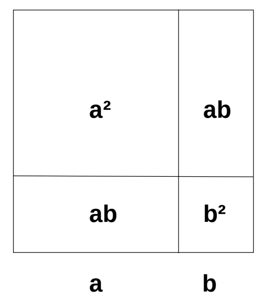
$$(a + b)\ \ = a\ \ + 2ab + b$$

(*fórmula 1*)

Essa fórmula quer dizer que o quadrado de uma soma de dois números é igual ao quadrado do primeiro, mais duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo. Veja a demonstração.

$$\begin{aligned}(a + b) &= (a + b)(a + b)\\ &= aa + ab + ba + bb\\ &= a \ \ + ab + ba + b\\ &= a \ \ + 2ab + b\end{aligned}$$

A interpretação desse resultado utilizando as áreas dos retângulos poder ser vista na figura a seguir.



A outra identidade, irmã da que acabamos de ver é a seguinte :

$$(a - b) = a \ \ - 2ab + b$$

(*fórmula 2*)

Ela nos diz que o quadrado de uma diferença de dois números é igual ao quadrado do primeiro, menos duas vezes o produto do primeiro pelo segundo, mais o quadrado do segundo.

Uma das formas de demonstrar esse resultado é escrever **a - b** como **a + (-b)** e aplicar o quadrado da soma. Veja:

$$\begin{aligned}(a-b) &= (a + - (b)) =\\ &= a \ \ + 2a(- b) + (- b)\\ &= a \ \ - 2ab + b\end{aligned}$$

EXEMPLO 2

Calcule 29 .

Ora, se temos uma máquina de calcular, não tem graça.

Se não, é claro que sabemos calcular 29 · 29 com lápis e papel. Faça a conta.

Vamos dar o resultado de maneira bem rápida e simples. Escrevemos 29 como 30 - 1 e usamos a *fórmula 2*. Veja:

$$\begin{aligned}29 &= (30-1)\\ &= 30 \ \ - 2 \cdot 30 \cdot 1 + 1\\ &= 900 - 60 + 1\\ &= 841\end{aligned}$$

A diferença de quadrados

A terceira identidade que vamos aprender é a seguinte:

$$a - b = (a + b)(a - b)$$

(*fórmula 3*)

Ela nos diz que a diferença entre os quadrados de dois números é igual ao produto da soma pela diferença desses números. Para demonstrar isso, basta desenvolver o lado direito da igualdade. Veja:

$$\begin{aligned}(a + b)(a - b) &= aa + \cancel{ab} - \cancel{ba} - bb \\ &= a - b\end{aligned}$$

Esta identidade nos será útil em diversos momentos do nosso curso. Por ora, veja como ela pode simplificar certos cálculos.

EXEMPLO 3

Em um loteamento, cada quadra de terreno é um quadrado com 61 metros de lado. O autor do projeto resolveu então aumentar a largura da calçada e, com isso, cada quadra passou a ser um quadrado de 59 metros de lado. Que área os terrenos perderam?

Pense um pouco antes de ver a solução.

Uma forma simples de responder a esta questão é calcular a área antiga, a área nova e depois subtrair. Inicialmente a área da quadra era 61 .
Depois a área da quadra passou a ser 59 . Então a área perdida foi

$$61 - 59$$

É claro que sabemos fazer estas contas. Mas, veja como fica simples o cálculo se utilizamos a fórmula 3.

$$61 - 59 = (61 + 59)(61 - 59) = 120 \cdot 2 = 240$$

Os terrenos perderam, então, 240 metros quadrados.

Exercícios

Exercício 1
Desenvolva:
a) $x (a + b - c)$
b) $(x + a)(x + b)$

Exercício 2
Resolva a equação: $2(x-5) + 3(x + 1) = 23$

Exercício 3

Desenvolva: $(x + 3)$

Exercício 4

Desenvolva: $(x - 1)$

Exercício 5

Resolva a equação: $(x - 3) = x - 33$

Exercício 6

Calcule: $173 - 172$

Exercício 7

Simplifique a expressão: $(a + 2)(a - 2) - (a - 3)$

Exercício 8

Resolva a equação: $(x - 5)(x + 5) = (x - 1)$

Exercício 9

Calcule:

a) 82 usando a fórmula 1

b) 99 usando a fórmula 2

c) $42 \cdot 38$ usando a fórmula 3