

Comprimento e área do círculo

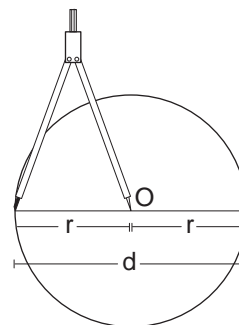
Introdução

Nesta aula vamos aprender um pouco mais sobre o círculo, que começou a ser estudado há aproximadamente 4000 anos. Os círculos fazem parte do seu dia-a-dia. A superfície de uma moeda e de um disco são exemplos de círculos.

Para desenhar um círculo utilizamos o **compasso** como você pode observar na ilustração ao lado.

A linha desenhada pelo compasso é conhecida como **circunferência**. Ela é o contorno do círculo.

A medida da abertura do compasso é o **raio** do círculo ou da circunferência. A distância entre os dois pontos diametralmente opostos da circunferência é o **diâmetro**, que vale o dobro do raio. Ainda hoje os astrônomos têm grande interesse em estudar os fenômenos da natureza que envolvem o círculo e suas partes. Observe esta matéria publicada no jornal *O Globo* em novembro de 1994.



O → centro
r → raio
d → diâmetro
 $d = 2r$

Brasil terá no dia 3 imagem espetacular do eclipse solar

Astrônomos de todo o mundo têm encontro marcado na próxima quinta-feira, dia 3 de novembro, em Santa Catarina, quando estará ocorrendo um eclipse total do Sol.

A Lua se alinhará entre o Sol e a Terra e o disco solar ficará completamente encoberto pela Lua. A importância do fenômeno estará na possibilidade de estudar a física da coroa solar, a física da atmosfera e a calibração das órbitas (detalhes sobre a posição da Lua e da Terra).

Fenômeno será visto por poucos

Eclipses ocorrem quando, do ponto de vista do observador, um astro se interpõe na frente de outro. Quando a Lua se alinha entre o Sol e a Terra, ocorre um eclipse do Sol. O eclipse só é total se o disco solar ficar completamente



encoberto pela Lua. Esse fenômeno ocorre numa região relativamente pequena, de poucas centenas de quilômetros, se comparada aos 12.742 km de diâmetro médio da Terra.

Medir o comprimento desta curva chamada circunferência é o nosso problema. Uma das maneiras de resolver um problema matemático é tentar compreendê-lo, observando suas propriedades e fazendo experiências. É desta forma que vamos encontrar uma expressão matemática para o cálculo do comprimento de qualquer circunferência.

Uma primeira olhada em várias circunferências nos leva a concluir que seu comprimento depende da medida do raio. É fácil notar que quanto maior o raio maior é o comprimento da circunferência.



Podemos partir desta observação para descobrir qual a relação matemática existente entre estas duas medidas.

No quadro abaixo foram anotadas algumas medidas dos comprimentos e diâmetros de várias circunferências. Na última coluna dividimos cada medida obtida do comprimento (**C**) pela medida do diâmetro correspondente (**d**).

OBJETO MEDIDO	C	d	$\frac{C}{d}$
FICHA TELEFÔNICA	6,9cm	2,2cm	3,13
FUNDO DE UM COPO	15,5cm	4,9cm	3,16
MESA DE JANTAR	4,40m	1,40m	3,14

Faça você mesmo mais algumas medidas e verifique se o resultado da divisão $\frac{C}{d}$ é sempre um número um pouco maior do que 3. Quanto mais precisas forem nossas medidas, mais próximo estaremos de um número constante conhecido como **número pi**, cujo símbolo é π .

O número π é um número irracional cujo valor aproximado é 3,14. Na verdade este número possui infinitas casas decimais, mas na prática utilizamos apenas uma aproximação de seu valor.

$$\pi = 3,14159265358979323846264\dots$$

$$\pi \approx 3,14$$

A partir deste resultado obtemos uma expressão geral:

$$\frac{C}{d} = \pi$$

$$C = \pi d$$

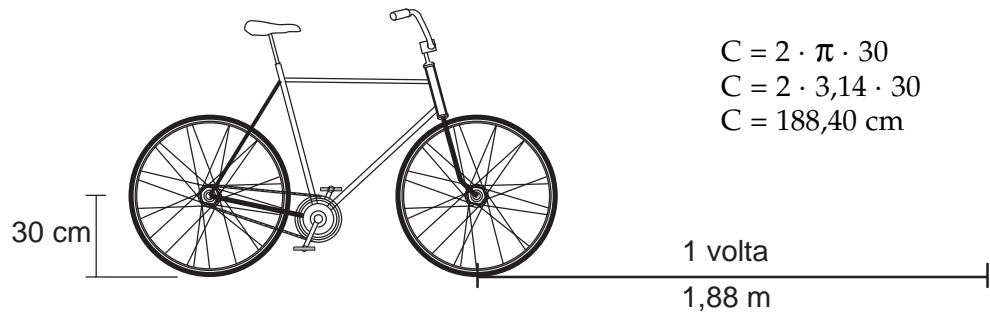
$$C = \pi 2 r$$

$$C = 2 \pi r$$

EXEMPLO 1

Qual o comprimento da roda de uma bicicleta de aro 26?

Uma bicicleta aro 26 tem o raio de sua roda medindo 30 cm. Substituindo $r = 30$ cm na fórmula $C = 2 \pi r$ temos:

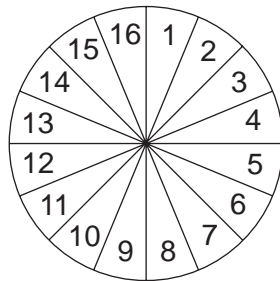


Observe este resultado: $188,40$ cm = $1,884$ m. Isso significa que uma volta completa da roda desta bicicleta equivale a uma distância de aproximadamente 1 metro e 88 centímetros.

Área do círculo

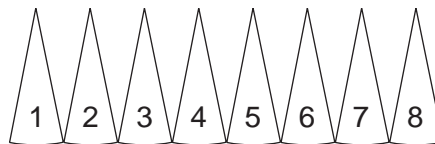
Da mesma forma que o comprimento da circunferência, a área do círculo depende da medida de seu raio.

Na aula 15 você aprendeu a fazer o cálculo da área de várias figuras planas. Para obter aquelas expressões, muitas vezes nós recortamos figuras e movemos suas partes para transformá-la em outra figura mais simples. Nós sempre podemos proceder desta maneira para encontrarmos a área de qualquer figura. É o que faremos também com o círculo.

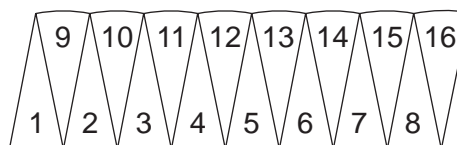


Dividimos o círculo ao lado em 16 partes iguais. Cada uma destas partes é denominada **setor circular**.

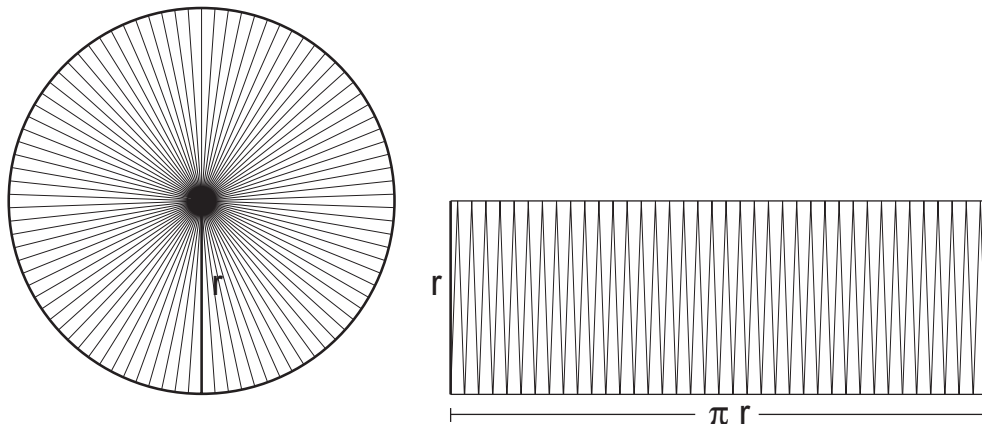
Podemos pegar a metade destes setores e rearrumá-los como na figura abaixo.



A outra metade pode ser encaixada sobre esta, de forma a não deixar espaços vazios.



Essa figura ainda não é um quadrilátero, pois dois de seus lados são formados por arcos sucessivos e não por segmentos de reta. No entanto, usando um pouco a imaginação, podemos dividir nosso círculo em setores circulares cada vez menores:



Área do círculo \approx área do retângulo

Repetindo o que fizemos com as 16 partes vamos pegar a metade dos setores em uma certa posição e encaixarmos sobre estes a outra metade. Note que nos aproximamos muito mais de um retângulo de altura igual ao raio e comprimento igual a metade do comprimento da circunferência deste círculo.

$$A = \pi r \cdot r$$

$$A = \pi r^2$$

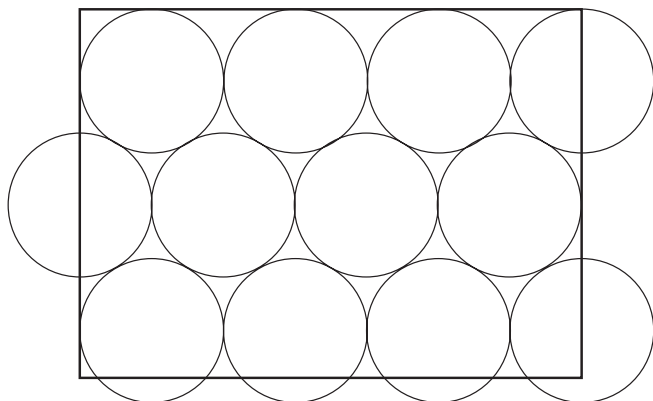
EXEMPLO 2

Quantos círculos de raio igual a 10 cm poderão ser cortados em uma cartolina de 70 cm por 50 cm?

- Área da cartolina = $70 \times 50 = 3500 \text{ cm}^2$
- Área do círculo = $3,14 \times 10^2 = 3,14 \times 100 = 314 \text{ cm}^2$

Para calcular quantos círculos de 314 cm^2 de área cabem num retângulo de 3500 cm^2 de área dividimos 3500 por 314, o que equivale a aproximadamente 11,15. Isto significa que cabem 11 círculos e, como era de esperar, sobra cartolina.

No entanto, este problema nos faz relacioná-lo com um outro. Como devo desenhar estes círculos para aproveitar a cartolina ao máximo?

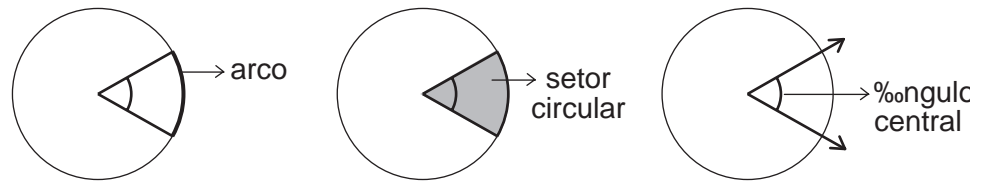


Para você pensar:

O que se pode concluir desmembrando a figura ao lado? É realmente possível desenhar 11 círculos de 10 cm de raio nesta cartolina? Por quê?

Comprimento do arco e área do setor circular

Muitas vezes estamos interessados em calcular apenas o comprimento de uma parte da circunferência (arco) ou a área de uma “fatia” do círculo (setor circular).



A todo arco está associado um ângulo central e a todo setor também corresponde um ângulo central. O ângulo central é aquele que tem o vértice no centro da circunferência.

O ângulo central máximo, que corresponde a uma volta completa e está associado à circunferência toda, mede 360° .

Sabendo disto, utilizamos o método de cálculo conhecido por **regra de três** para calcular o comprimento de um arco ou a área de um setor. Para tanto basta conhecer a medida do ângulo central correspondente.

EXEMPLO 3

O círculo ao lado tem raio medindo 2 cm. Vamos calcular a área de um setor circular de 45° .

$$\text{Área do círculo} = \pi (1,5) \cong 7,065 \text{ cm}$$

$$\text{Área do setor} = S = ?$$

$$\begin{array}{r} 7,065\text{cm} \quad \text{---} \quad 360^\circ \\ S \quad \text{---} \quad 45^\circ \end{array}$$

$$S = \frac{7,065 \times 45^\circ}{360^\circ} @ 0,883\text{cm}^2$$

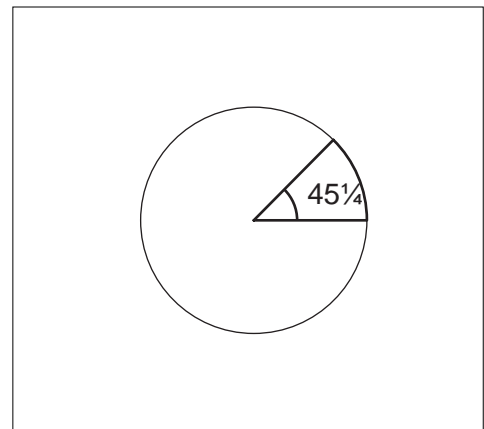
Usando novamente a regra de três podemos calcular o comprimento do arco, que corresponde ao ângulo de 45° nesta circunferência.

$$\text{Comprimento da circunferência} = 2 \cdot \pi \cdot 1,5 \cong 9,42 \text{ cm}$$

$$\text{Comprimento do arco} = c$$

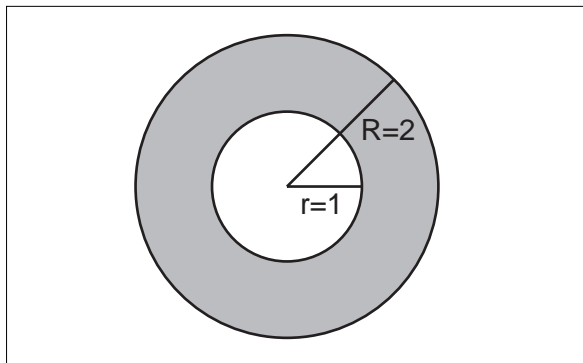
$$\begin{array}{r} 9,42 \quad \text{---} \quad 360^\circ \\ c \quad \text{---} \quad 45^\circ \end{array}$$

$$c = \frac{9,42 \times 45^\circ}{360^\circ} @ 1,1775\text{cm}^2$$



Área da coroa circular

Como você leu na reportagem do início desta aula, coroa circular é a parte compreendida entre as circunferências de dois círculos de mesmo centro.



Na figura ao lado, a parte pintada é uma coroa circular. A área da coroa circular é calculada subtraindo-se as áreas dos dois círculos que a formam.

Nesta figura temos :

$$\text{Área do círculo maior} = \pi \cdot 2^2 \cong 12,56 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área do círculo menor} = \pi \cdot 1^2 \cong 3,14 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área da coroa circular} = 12,56 - 3,14 = 9,42 \text{ cm}^2$$

Podemos escrever, de uma forma geral, que a área A de uma coroa circular é $A = \pi R^2 - \pi r^2$ ou $A = \pi (R^2 - r^2)$, onde R é o raio do círculo maior e r é o raio do círculo menor.

Razão entre áreas

Uma pizza com 20 cm de diâmetro custa R\$ 4,80. Quanto você espera pagar por uma outra do mesmo sabor com 30 cm de diâmetro ?

Observe que o diâmetro da pizza maior é igual a $3/2$ do diâmetro da menor:

$$\frac{3}{2} \text{ de } 20 = (20 : 2) \times 3 = 30$$

No entanto, se você respondeu R\$ 7,20 = $(3/2) \cdot 4,80$ sua resposta está errada, pois, para o cálculo do preço, o que interessa é a razão entre as áreas das pizzas:

$$\text{Área da pizza menor} = 3,14 \cdot (20)^2 = 1256 \text{ cm}^2$$

$$\text{Área da pizza maior} = 3,14 \cdot (30)^2 = 2826 \text{ cm}^2$$

$$\text{Razão entre as áreas} = \frac{2826}{1256} = \frac{9}{4}$$

Vemos então que a área da pizza maior é $9/4$ da área da menor. Portanto, o preço da maior deve ser $9/4$ do preço da pizza menor.

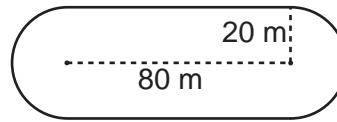
$$\frac{9}{4} \cdot \text{R\$ } 4,80 = \text{R\$ } 10,80$$

Conclusão: a razão entre as áreas é o quadrado da razão entre os comprimentos (diâmetro ou raio). Neste exemplo, $\frac{9}{4} = \left(\frac{30}{20}\right)^2$

Exercícios

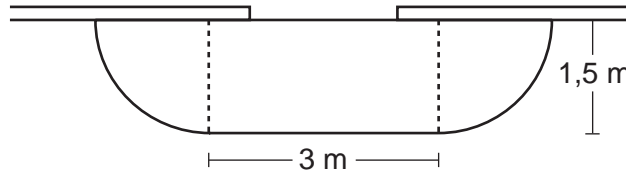
Exercício 1

Calcule o comprimento da pista de atletismo representada na figura abaixo.



Exercício 2

Calcule a área da varanda representada na figura abaixo



Exercício 3

O comprimento da linha do equador da Terra tem aproximadamente 40.000 km. Qual é o raio da Terra?

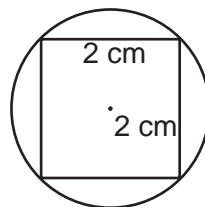
Exercício 4

Se o raio de um círculo é o triplo do outro, quantas vezes a área do primeiro é maior que a do segundo?

Exercício 5

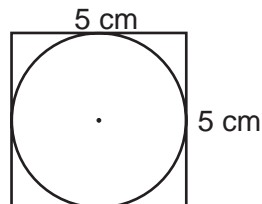
Calcule a área do círculo nas figuras abaixo.

a)



circunferência circunscrita

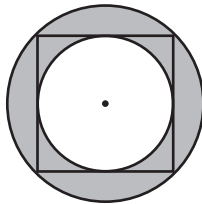
b)



circunferência inscrita

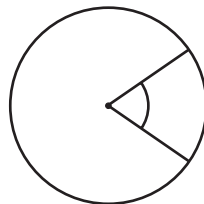
Exercício 6

Determine a área da coroa circular limitada pelas circunferências inscrita e circunscrita num mesmo quadrado de lado $\ell = 4$ cm

**Exercício 7**

Num círculo de raio $r = 10$ cm, calcule :

- o comprimento de um arco com $\alpha = 45^\circ$
- a área de um setor circular com $\alpha = 60^\circ$
- a área de um setor circular com $\alpha = 120^\circ$



α • um %ângulo central

Exercício 8

Uma pizza tem raio igual a 15 cm e está dividida em 6 fatias. Calcule a área de cada fatia.

Exercício 9

Uma praça circular tem 200 m de raio. Quantos metros de grade serão necessários para cerca-lá?

Exercício 10

Numa bicicleta de aro 26 (como no exemplo desta aula), quantas voltas completas as rodas precisam dar para um percurso de 3,76 km?