

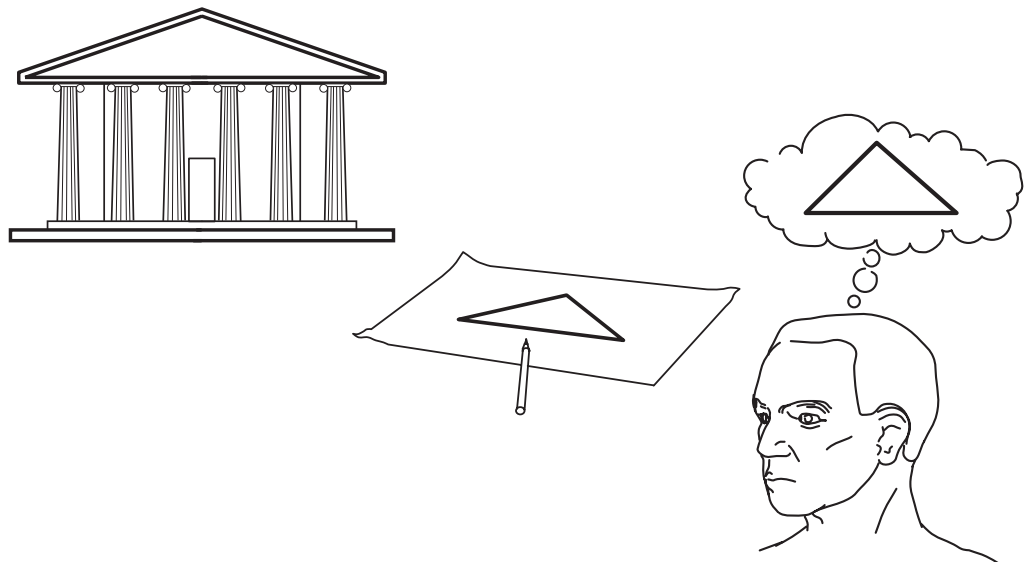
O Teorema de Tales

Introdução

A ciência, tão fundamental na era moderna, teve seu início por volta do ano 600 a.C. na cidade de Mileto, Grécia, especialmente com de Tales de Mileto. Tales era filósofo, geômetra, astrônomo, físico, político e comerciante, e acredita-se que tenha nascido no ano 625 a.C. Não se sabe ao certo em que ano morreu.

Foi ele quem primeiro chamou a atenção para o aspecto abstrato dos objetos geométricos, ao considerar um triângulo ou uma pirâmide, por exemplo, não como coisas concretas, feitas de madeira ou pedra, mas como objetos do nosso pensamento. Uma de suas descobertas no campo filosófico foi a de que “não apenas os homens estão sujeitos a leis, mas também a Natureza”. E apontando para a sombra dos degraus de um estádio desportivo, teria dito: “Os ângulos dos degraus obedecem a uma lei: são todos iguais”. (Depois veremos esse exemplo com maiores detalhes.)

Assim, uma das idéias deste grande filósofo e matemático é esta: uma lei que se aplique a triângulos vale tanto para triângulos de construção (por exemplo, a construção de uma casa) como para aqueles desenhados (a planta da casa) e mesmo para triângulos...“imaginários”, como ele se referia aos triângulos abstratos, os do nosso pensamento, aqueles com que de fato lida a geometria.

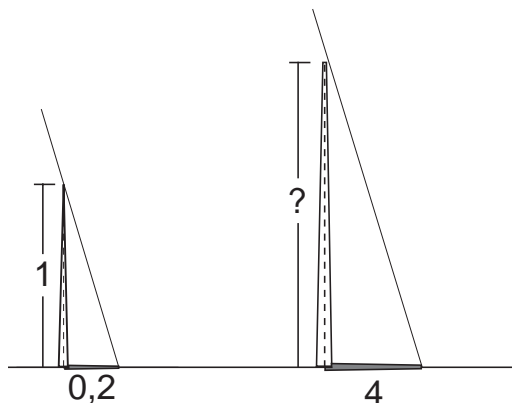


Outra importantíssima característica do pensamento de Tales é que estas leis matemáticas - ou **teoremas**, como são chamadas - devem ser provadas (ou demonstradas) por um raciocínio lógico. (E não apenas explicadas com argumentos religiosos ou míticos, como se fazia até então em lugares antes mais desenvolvidos, como o Egito e a Babilônia.) Desse modo, Tales procurava sempre demonstrar cada uma de suas afirmações novas baseando-se em outras afirmações já demonstradas, outros teoremas, formando assim cadeias de raciocínio.

Nesta aula você terá a oportunidade de redescobrir alguns desses teoremas bastante interessantes e úteis na vida prática que são atribuídos a Tales, especialmente aquele que ficou conhecido com seu nome: o Teorema de Tales.

Você ficará surpreso ao ver quantas aplicações diferentes existem destes teoremas: desde o cálculo da altura de prédios e outras distâncias inacessíveis (veja a aula 20) até o modo certo de aumentar a feijoada! Como veremos, tudo isso trata de proporcionalidade de números (ou **regra de três**). Na realidade, o Teorema de Tales é “a figura da regra de três”. Mas... cada coisa a seu tempo!

Conta-se que, numa viagem ao Egito, Tales foi desafiado pelos sacerdotes egípcios a explicar como “adivinhara” a altura de uma das pirâmides. Os sacerdotes acreditavam que essa informação era sagrada e havia sido inadvertidamente fornecida a ele, que, por esse motivo deveria ser preso. Tales explicou seu raciocínio exemplificando-o com o cálculo da altura de um obelisco cuja sombra era mais fácil de ser medida. Aqui está o problema para você tentar responder: Em certo momento do dia, uma vareta de 1 m, espetada verticalmente no chão, faz uma sombra que mede 20 cm. No mesmo instante, um obelisco de pedra, ali perto, faz uma sombra de 4 m. Qual a altura do obelisco?

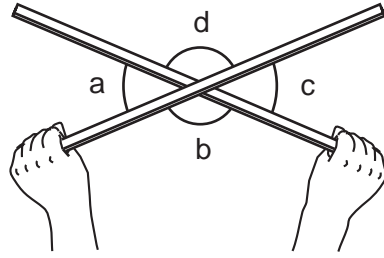


Atenção: como o Sol está muito longe de nós, podemos considerar seus raios como retas paralelas. Tente encontrar o que se pede trabalhando com papel quadriculado e régua.

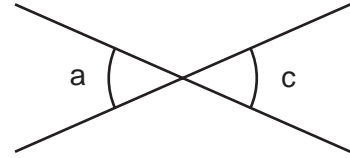
Ângulos opostos pelo vértice

Nossa aula

Um dos teoremas atribuídos a Tales é muito simples de ser entendido concretamente: quando seguramos uma vareta de madeira em cada mão e cruzamos essas varetas estamos representando retas concorrentes. Independentemente da abertura que você dá às varetas, elas sempre formam, à sua esquerda e à direita, dois ângulos (opostos pelo vértice) iguais.



Duas varetas formam
4 ângulos, opostos
dois a dois

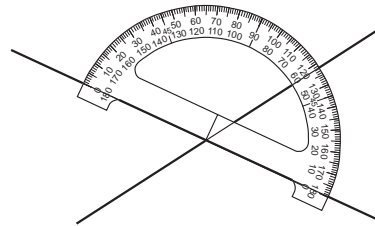


Quanto mede cada
um destes dois ângulos
opostos pelo vértice?

$$\bar{a} = \dots$$

$$\bar{c} = \dots$$

Lembre: Como se mede um ângulo com transferidor:



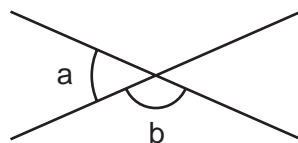
Exemplo: O menor dos ângulos que estas retas formam mede 58° . O maior mede $180^\circ - 58^\circ = 122^\circ$.

“Por que ângulos opostos pelo vértice são sempre iguais?”, Tales se perguntou. Podemos explicar isso do seguinte modo, baseando-se na figura do transferidor: os ângulos \bar{a} e \bar{b} formam juntos um ângulo de 180° (ângulo raso), que chamamos de ângulos suplementares (veja a figura abaixo); da mesma forma, também \bar{b} e \bar{c} são ângulos suplementares. Ou seja:

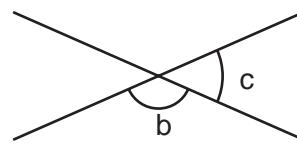
$$\bar{a} + \bar{b} = 180^\circ ; \text{então } \bar{a} = 180^\circ - \bar{b}$$

$$\bar{b} + \bar{c} = 180^\circ ; \text{então } \bar{c} = 180^\circ - \bar{b}$$

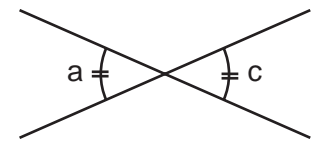
Conclusão : $\bar{a} = \bar{c}$ (C.Q.D.!).



$$\hat{a} + \hat{b} = 180^\circ$$



$$\hat{b} + \hat{c} = 180^\circ$$

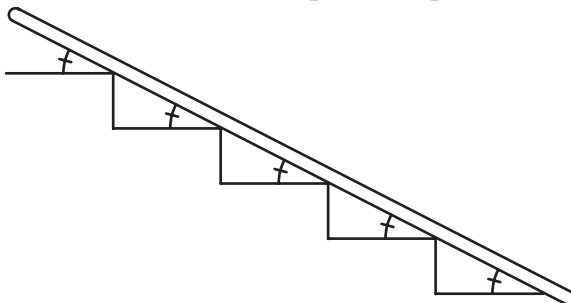


Logo: $\hat{a} = \hat{c}$

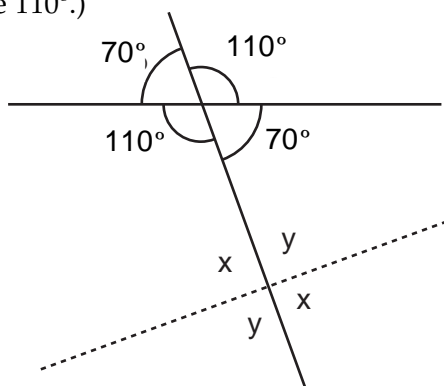
Sobre duas retas concorrentes não há muito mais o que dizer: dos quatro ângulos que se formam, quaisquer dos ângulos vizinhos são suplementares e quaisquer dos ângulos opostos pelo vértice são iguais. Assim, vamos estudar agora o que ocorre quando acrescentamos uma terceira reta a estas duas, paralela a uma delas.

Retas paralelas cortadas por uma transversal

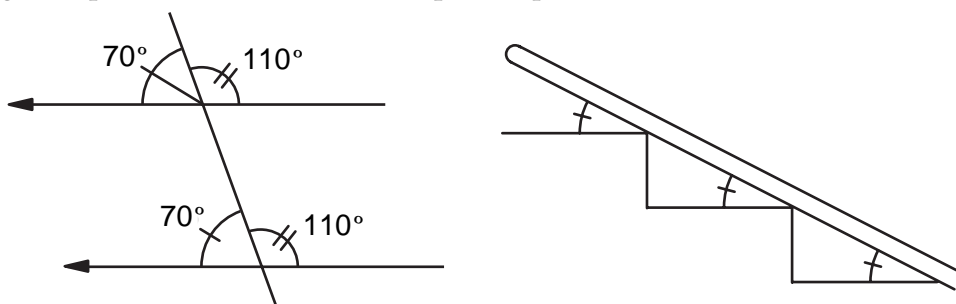
Júnior é um garoto esperto. Outro dia, no “velho Maracanã”, ele mostrava ao tio (com quem conversa muito sobre seus estudos) os ângulos formados nos degraus do estádio. Ele ilustrou seu raciocínio deitando o pau da bandeira de seu clube atravessado em relação aos degraus. Visto de lado, o pau da bandeira forma ângulos iguais com todos os degraus. Vemos também que isso só acontece porque os degraus são todos horizontais, e portanto paralelos.



Voltemos, então, ao que acontece quando acrescentamos uma terceira reta às duas retas concorrentes do início da aula. De modo geral, a terceira reta formará quatro novos ângulos (dois pares), diferentes dos ângulos das retas iniciais... (Meça os ângulos x e y da figura abaixo, e compare-os com os ângulos iniciais, que medem 70° e 110° .)



Mas há uma posição especial na terceira reta em que x e y medem precisamente 70° e 110° : quando a terceira reta é paralela a uma das retas. (Como os degraus que Júnior viu no estádio, que são paralelos).



Esta experiência do garoto pode ter sido vivida também por Tales de Mileto, que há 2600 anos enunciou:

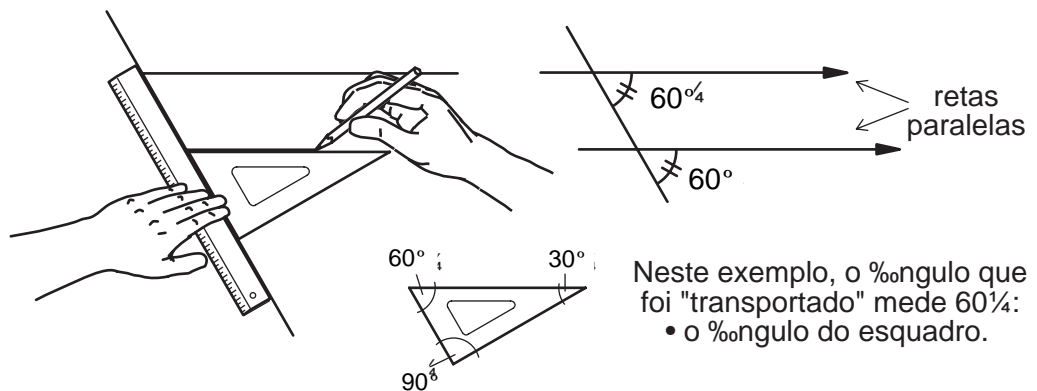
Quando retas paralelas são cortadas por uma reta transversal, os ângulos formados numa das retas paralelas são correspondentes e iguais aos ângulos da outra.

É fácil verificar isso concretamente. A seguir, o item sobre a aplicação prática no desenho técnico mostra como o ângulo de uma das retas paralelas é “transportado” pela reta transversal até encaixar-se no ângulo da outra reta. Por isso os ângulos são correspondentes e iguais.

Uma aplicação prática no desenho técnico

Na verdade, você pode verificar experimentalmente (como fez acima, ao medir os ângulos) que a **recíproca** desta afirmação também é verdadeira. Ou seja: quando os ângulos são correspondentes e iguais, então as retas são paralelas. Desenhe ângulos correspondentes e constate o paralelismo das retas.

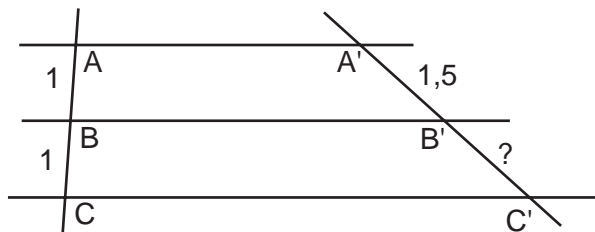
Este novo fato tem uma aplicação prática muito usada no desenho técnico, como, por exemplo, no desenho da planta de uma casa. Para traçar retas paralelas seguramos a régua e o esquadro e riscamos as retas, como mostra a figura:



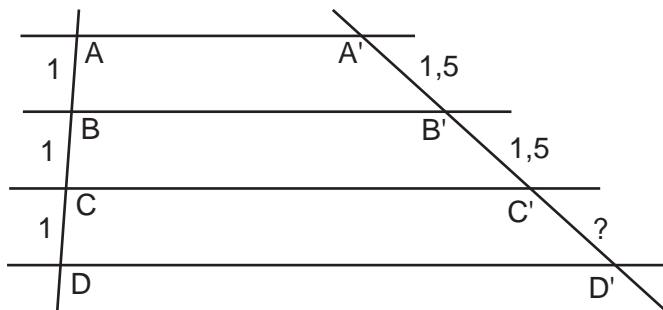
Segmentos proporcionais

Vimos o que acontece com os ângulos quando duas retas paralelas são cortadas por uma reta transversal: eles são transportados de uma das retas paralelas à outra. Vejamos o que ocorre quando não duas mas três retas são paralelas: como você já sabe, os ângulos formados em todas as três são iguais. Mas não apenas isso; agora também formam-se segmentos.

Na figura a seguir, eles estão representados por AB e BC . Algo muito interessante aconteceu. Se AB e BC forem iguais (no exemplo $AB = BC = 1$ cm) e traçarmos qualquer outra reta transversal, então os dois novos segmentos $A'B'$ (lê-se: “A linha, B linha”) e $B'C'$ -serão.... (meça $B'C'$; e compare-o com $A'B'$, que neste exemplo mede 1,5 cm. Então conclua a frase anterior.)

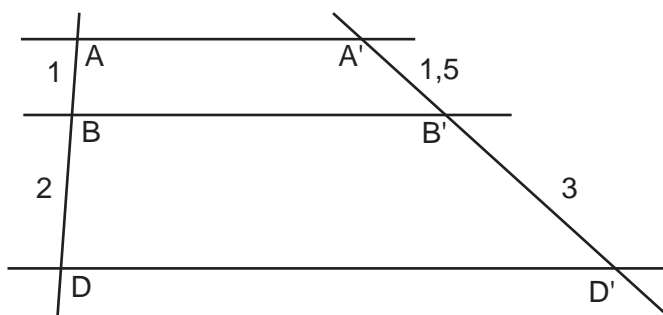


$A'B'$ e $B'C'$ também serão iguais isto é, $B'C' = 1,5 = A'B'$. Da mesma forma, se traçássemos uma quarta reta paralela passando pelo ponto D tal que também $CD = 1$, então quanto mediria $C'D'$? É claro que, pelo mesmo motivo, $C'D' = 1,5 = B'C' = A'B'$.



Podemos enunciar isto da seguinte maneira: quando um feixe (isto é, um conjunto de três ou mais retas) de retas paralelas é cortado por duas retas transversais, se os segmentos numa das retas forem iguais, (no exemplo, $AB = BC = CD = 1$), então os segmentos na outra reta também o serão ($A'B' = B'C' = C'D' = 1,5$).

“Mas, e se os segmentos na primeira reta não forem iguais? Como no exemplo acima, onde $AB = 1$ cm e $BD = 2$ cm o que podemos dizer sobre $A'B'$ e $B'D'$ (além do fato de que também não são iguais)? Veja a figura abaixo: se $A'B' = 3$ cm, temos $B'D' = 6$ cm. Olhe para estes quatro números da figura: 1; 2; 1,5 e 3. Tomados nesta ordem, formam duas frações iguais: $\frac{1}{2} = \frac{1,5}{3}$.”

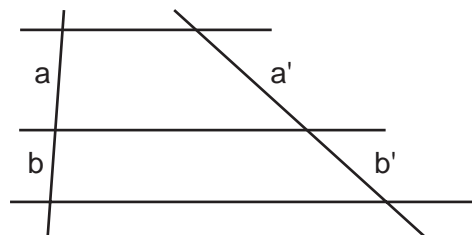


Dizemos que estes quatro números são **números proporcionais**, e escrevemos: “ $1:2 :: 1,5:3$ ”. (Lê-se: “1 está para 2, assim como 1,5 está para 3”). Assim, os segmentos que têm estas medidas, na figura representados respectivamente por AB , BC , $A'B'$ e $B'C'$, são segmentos proporcionais. De um modo geral, definimos: AB e BC são **segmentos proporcionais** a $A'B'$ e $B'C'$ (nesta ordem), se $\frac{AB}{BC} = \frac{A'B'}{B'C'}$.

O Teorema de Tales

Como se pôde ver na última figura da página anterior, o feixe de retas paralelas “transporta” uma razão de segmentos: ali, a razão dos segmentos AB e BC (no caso, $\frac{1}{2}$) é igual à razão dos segmentos $A'B'$ e $B'C'$ ($\frac{3}{6}$). O Teorema de Tales fala exatamente isso:

Quando três retas paralelas são cortadas por duas retas transversais, os segmentos determinados numa das retas transversais são proporcionais aos segmentos determinados na outra.



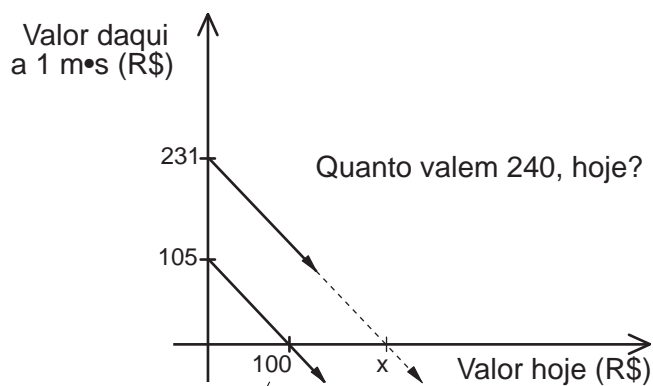
Teorema de Tales: $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$

(se as três retas forem paralelas.)

Uma “aplicação rendosa” do Teorema de Tales

Dona Tetê quer saber qual entre dois crediários é o mais vantajoso. Na Loja X um aparelho de som custa R\$ 410,00 à vista. Já na Loja Y, o mesmo aparelho de som sai por duas parcelas a primeira de R\$ 200,00 e a segunda, no próximo mês, de R\$ 231,00. Considerando que a inflação prevista é de 5% no próximo mês, qual dos dois crediários sai mais “em conta” para dona Tetê?

Dona Tetê pode resolver este problema com um gráfico, se quiser visualizar os números com que está trabalhando. Veja como:



Note: inflação = 5%

Os valores em reais no próximo mês serão proporcionais aos valores de hoje devido à inflação. Assim se chamamos de x o valor correspondente hoje aos R\$ 231,00 do próximo mês, podemos escrever: $\frac{100}{x} = \frac{105}{231}$

Temos uma regra de três. Portanto, para achar x podemos usar a fórmula “o produto dos meios (x e **105**) é igual ao produto dos extremos (**100** e **231**)”.

Logo, $105x = 23.100$, e então $x = 220$. Se dona Tetê traçar, pelo valor 240 do gráfico, uma reta paralela à que liga o 105 (daqui a um mês) ao 100 (hoje), encontrará precisamente 220 no eixo do hoje. Isso significa que, em valores de hoje, os R\$ 231,00 que dona Tetê pagaria no próximo mês equivalem a R\$ 220,00. Assim, o crediário Y está pedindo $200 + 220 = \text{R\$ } 420,00$ pelo aparelho de som, enquanto no crediário X o compramos por R\$ 410,00 que é, portanto, o mais vantajoso dos dois para o bolso do consumidor. É, dona Tetê: mais R\$ 10,00 para o nosso “crédito de gratidão” ao mestre Tales de Mileto, não é mesmo?

Semelhança de Triângulos

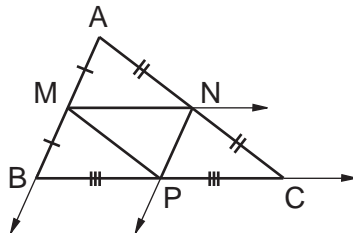
Se aplicarmos o Teorema de Tales num triângulo qualquer vamos obter resultados bastante interessantes e reveladores sobre os triângulos. Sendo ABC um triângulo, traçamos por M, ponto médio de AB, uma reta paralela ao lado BC e encontramos N. Então:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}; \text{ logo, } AN = NC, \text{ e N é o ponto médio do segmento.}$$

1

Analogamente, uma reta passando por N paralela a AB nos indica P, ponto médio de BC: $BP = PC = \frac{BC}{2}$. Mas, como BMNP é um paralelogramo,

$$MN = \frac{BC}{2} = BP = PC$$



Pelo mesmo raciocínio vemos que $NP = AM = MB$ e $MP = AN = NC$. Isso significa que se você desenhar o triângulo, cujos vértices são os pontos médios do triângulo maior, verá que são formados quatro triângulos... Todos iguais! (Lembre-se que ABC é um triângulo qualquer.)

Estes quatro triângulos são iguais, pois têm os três lados e os ângulos respectivamente iguais, conforme nos garante o teorema das retas paralelas cortadas por uma transversal. (Assinale esses ângulos iguais na figura anterior e depois nesta abaixo.)



É comum dizer “triângulos congruentes” (bem como “segmentos congruentes”) no lugar de “iguais”. Mas alguns professores hoje estão abandonando este termo.

Exercícios

Exercício 1

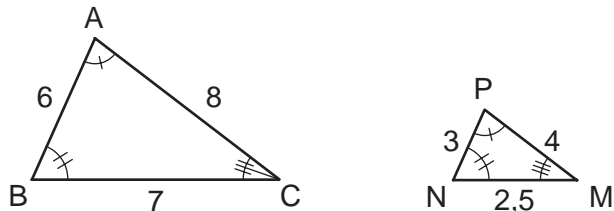
No triângulo ABC da figura acima, temos $AB = 6$ cm, $AC = 8$ cm e $BC = 7$ cm. Quanto medem os lados PNM (nas mesmas unidades)?

MN =

NP =

PM =

Cada lado de PNM é a metade de um dos lados de ABC, conforme as figuras acima nos mostraram. Assim, cada novo lado de PNM é obtido tomando-se a mesma razão ($\frac{1}{2}$) em relação a um lado do triângulo inicial ABC. Observe que apesar dos dois triângulos ABC e PNM não serem iguais eles têm os mesmos ângulos.



Quanto aos ângulos:

$$\bar{P} = \bar{A}$$

$$\bar{N} = \bar{B}$$

$$\bar{M} = \bar{C}$$

Quando aos lados:

$$\frac{PN}{AB} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{PM}{AC} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{NM}{BC} = \frac{3,5}{7} = \frac{1}{2}$$

Neste caso, dizemos que ABC e PNM são triângulos semelhantes e a razão da semelhança do segundo triângulo em relação ao primeiro é $\frac{1}{2}$.

De um modo geral, dizemos que dois triângulos - vamos chamá-los de $A'B'C'$ e ABC, para dizer que A' corresponde a A, B' corresponde a B, e C' a C - são **triângulos semelhantes**, quando:

- os ângulos de $A'B'C'$ e ABC são correspondentes e iguais: $\bar{A}' \hat{=} \bar{A}$
 $\bar{B}' \hat{=} \bar{B}$
 $\bar{C}' \hat{=} \bar{C}$ ou
- os lados de $A'B'C'$ e ABC são correspondentes e proporcionais:

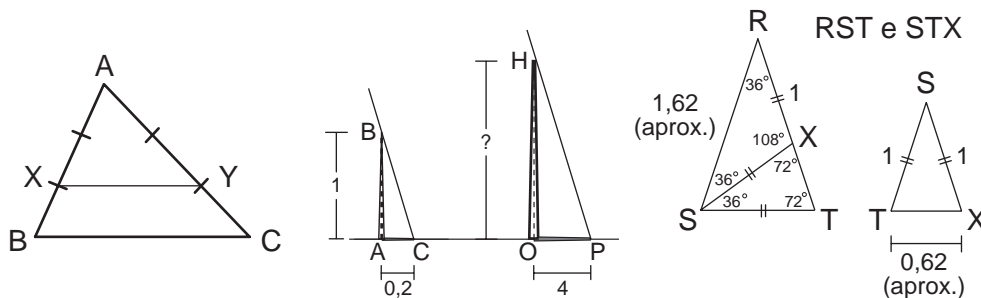
$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{A'C'}{AC} = \frac{B'C'}{BC}$$

Esta razão constante é a **razão de semelhança** de $A'B'C'$ para ABC.

Dá para perceber que dois triângulos semelhantes têm sempre a mesma forma, sendo um deles uma ampliação ou uma redução do outro. No exemplo acima, PNM é metade de ABC. Que tal agora reler a aula e fazer os exercícios?

Exercício 2

Estes pares de triângulos são triângulos semelhantes. Encontre a razão de semelhança do segundo triângulo para o primeiro:



a) ABC e AXY

$$\frac{AX}{AB} = \dots$$

$$\frac{AY}{AC} = \dots$$

$$\frac{XY}{BC} = \dots$$

b) OHP e ABC

$$\frac{AB}{OH} = \frac{AC}{OP} = \dots$$

c) RST e STX

$$\frac{SX}{RT} = \dots$$

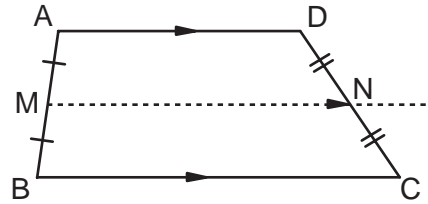
$$\frac{TX}{ST} = \dots$$

São a mesma razão?

Sugestão: Já que os lados de ABC estão divididos em 3 partes iguais, divida ABC em 9 triângulos iguais.

Exercício 3

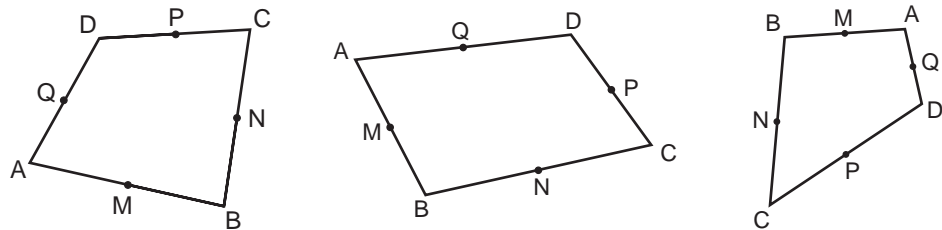
Seja ABCD um trapézio de bases BC e AD e M o ponto médio de AB



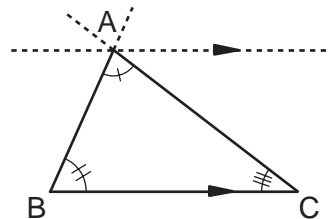
- Qual dos teoremas desta aula nos garante que, se traçarmos por M uma reta paralela às bases do trapézio encontraremos N, também ponto médio (de CD)?
- Por que MN é chamada de “base média” do trapézio? Como calcular MN?
- Meça AD, BC e MN na figura, e confirme sua resposta para o item b).

Exercício 4

Que tipo de quadrilátero é MNPQ, formado pelos pontos médios de cada lado de ABCD?

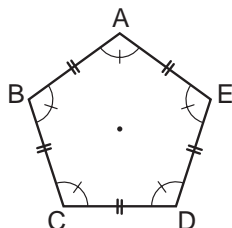


(Sugestão: Trace, nos quadriláteros as diagonais AC e BD; depois use esta aula para mostrar que os lados de MNPQ são paralelos a essas diagonais. Logo...)

Exercício 5

- Seja ABC um triângulo qualquer. Trace uma reta paralela a BC passando por A. Usando os teoremas desta aula, “transporte” os ângulos B e C para junto do ângulo A e mostre que A, B e C formam um ângulo raso; isto é, $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$.
- Seja ABCD um quadrilátero qualquer. Que fórmula podemos deduzir para a soma de seus ângulos?
 $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = \dots$
 (Sugestão: Como aprendemos a fazer com outros polígonos: divida ABCD em triângulos.)
- Se ABCDE é um pentágono qualquer, então $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = \dots$
 Dê exemplo.
- Quanto mede a soma dos ângulos internos de um polígono de n lados?
 (Sugestão: Observe os itens anteriores: triângulo ($n = 3$), quadrilátero ($n = 4$) e pentágono ($n = 5$) depois, responda o que se pede para n genérico, testando sua fórmula nestes três casos já respondidos.)

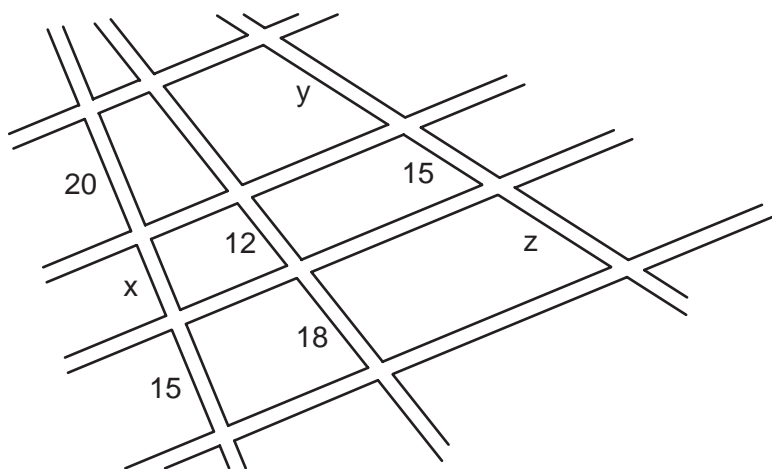
Exercício 6



- Se ABCDE é um pentágono regular, isto é, de lados iguais e ângulos iguais, então $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} + \hat{E} = \dots\dots\dots$ (Rever o **Exercício 5c.**)
- Encontre os ângulos do triângulo ACD.
- Você já viu um triângulo semelhante a esse nesta aula?

Exercício 7

Este mapa mostra quatro estradas paralelas que são cortadas por três vias transversais. Algumas das distâncias entre os cruzamentos dessas vias e estradas estão indicadas no mapa (em km), mas as outras precisam ser calculadas. Complete o mapa com as distâncias que faltam.



Exercício 8

Dados os números **a**, **b**, **c** e **d**, se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, escrevemos também **a : b :: c : d** (e lê-se: **a** está para **b**, assim como **c** está para **d**). Em cada item abaixo, escreva V ou F conforme ele seja verdadeiro ou falso. Os quatro números dados são, na ordem em que aparecem, números proporcionais?

- $1:3 :: 2:4$ () (Que relação esta proporção tem com $1:2 :: 3:6$?)
- $6:2 :: 3:1$ () (idem.)
- $3:1 :: 2:6$ ()
- $10:12 :: 20:26$ ()
- $\frac{1}{2} : \frac{1}{3} :: 3:2$ ()

Exercício 9

Uma propriedade dos números proporcionais afirma que se $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, então $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$. Ilustre esta propriedade com uma figura e meça todos os segmentos que aparecem: a, b, c, d, a + c e b+d.

Sugestão: "Pegue carona" em alguma figura da aula de hoje.