AULA

18

A raiz quadrada

Introdução

Qual é o número positivo que elevado ao quadrado dá 16? Basta pensar um pouco para descobrir que esse número é 4.

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16$$

O número 4 é então chamado ***raiz quadrada*** de 16, e essa operação, chamada de ***radiciação***, é representada assim:

$$\sqrt{16} = 4$$

Vamos agora explorar um pouco mais este exemplo pedindo ao leitor para resolver a equação

$$x^2 = 16$$

Lembre que resolver uma equação significa encontrar ***todos*** os valores que, se colocados no lugar do **x**, tornam a igualdade correta. Já sabemos que $x = 4$ é uma solução porque $4^2 = 16$. Já que, também,

$$(-4)^2 = (-4) \cdot (-4) = 16$$

descobrimos que a equação $x^2 = 16$ tem ***duas*** soluções: $x = 4$ e $x = -4$. Então, toda vez que tivermos uma equação desse tipo, nós a resolveremos assim:

$$\begin{aligned} x^2 &= 16 \\ x &= \pm\sqrt{16} \\ x &= \pm 4 \end{aligned}$$

Observe que o símbolo ± 4 (lê-se: mais ou menos 4) representa dois números: o **4** e o **- 4**, que são as duas soluções da equação dada.

Nossa aula

Vamos então explorar a raiz quadrada e ver algumas aplicações. Em primeiro lugar, observe os exemplos a seguir:

$\sqrt{9} = 3$ porque $3^2 = 3 \cdot 3 = 9$

$\sqrt{100} = 10$ porque $10^2 = 10 \cdot 10 = 100$

$\sqrt{5,76} = 2,4$ porque $2,4^2 = 2,4 \cdot 2,4 = 5,76$

Repare que os dois primeiros exemplos são simples, mas o terceiro já parece difícil. Como podemos descobrir que a raiz quadrada de 5,76 é 2,4? Esta pergunta será respondida ao longo desta aula, mas antes, vamos mostrar como isso começou.

Um Pouco de História

Por volta do século VI a.C. a matemática começou a se desenvolver de forma organizada. Temos conhecimento de que, ainda antes dessa época, existiam povos, como os egípcios e os babilônios, que usavam matemática para resolver problemas que ocorriam em suas comunidades. Mas, suas fórmulas, descobertas através de experiências, nem sempre eram corretas, ou seja, davam certo em alguns casos mas em outros não.

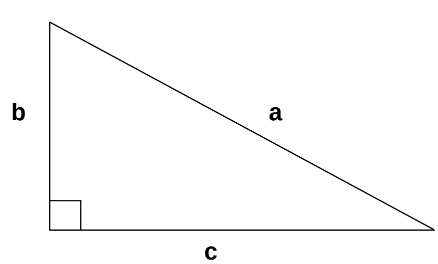
Esse desenvolvimento organizado da matemática teve início na Grécia antiga devido, principalmente, às descobertas de dois gênios chamados Tales e Pitágoras. Tudo o que sabemos desses dois primeiros grandes matemáticos que a humanidade conheceu foram relatos de outras pessoas, de forma que, hoje, é impossível saber o que é lenda e o que realmente aconteceu. De qualquer forma, o importante foram as idéias que surgiram naquela época e que permitiram o rápido e sólido desenvolvimento da matemática. Esse desenvolvimento se deu através de ***teoremas*** que são afirmações válidas em ***todas*** as situações de um mesmo tipo, e são demonstradas a partir de conhecimentos anteriores.

O Teorema de Pitágoras

No século VI a.C. foi descoberta uma propriedade válida em todos os triângulos retângulos. Ela ficou conhecida como ***Teorema de Pitágoras***.

Em todo triângulo retângulo, o quadrado da hipotenusa é igual à soma dos quadrados dos catetos.

Essa afirmação, que será demonstrada na nossa próxima aula, pode ser escrita como uma fórmula. Se em um triângulo retângulo, representamos o comprimento da hipotenusa por **a** e os comprimentos dos catetos por **b** e **c** (como na figura abaixo),



então, o Teorema de Pitágoras nos diz que

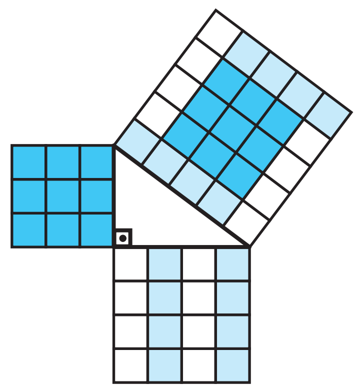
$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$

Por exemplo, já era conhecido mesmo antes de Pitágoras que o triângulo de lados **3**, **4** e **5** é um triângulo retângulo. De fato, observe que, se na fórmula acima fizemos **a = 5**, **b = 4** e **c = 3**, obtemos:

$$5^2 = 4^2 + 3^2$$

que é uma igualdade correta. Observe ainda que $\mathbf{5^2}$ é a área de um quadrado de lado **5**; $\mathbf{4^2}$ é a área de um quadrado de lado **4** e $\mathbf{3^2}$ é a área de um triângulo de lado **3**. Veja então na figura a seguir a seguinte interpretação do Teorema de Pitágoras:

> *A área do quadrado construído sobre a hipotenusa é igual à soma das áreas dos triângulos construídos sobre os catetos.*

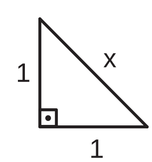


A volta da raiz quadrada

Será que todo número positivo possui uma raiz quadrada?

Esta é uma pergunta intrigante e a resposta é: sim.

Vejamos o seguinte exemplo. Consideremos um triângulo retângulo com catetos iguais a 1 e tratemos de calcular sua hipotenusa.



Esse é um triângulo conhecido. Ele já apareceu na aula 7 e esse problema foi resolvido, aproximadamente, pela medida do comprimento da hipotenusa. Agora, podemos resolvê-lo pelo teorema de Pitágoras.

$$\begin{aligned} x^2 &= 1^2 + 1^2 \\ x^2 &= 1 + 1 \\ x^2 &= 2 \end{aligned}$$

Já sabemos que essa equação tem duas soluções: uma positiva e outra negativa. Mas, como **x** é um comprimento, então ele é representado por um número positivo.

Daí,

$$x = \sqrt{2}$$

Temos então que x é a ***raiz quadrada*** de 2. Mas, que número é esse? Sabemos que ele existe porque estamos vendo sua representação no desenho. Vamos ver que, neste caso, ele só pode ser determinado ***aproximadamente***.

Façamos então algumas tentativas.

$\mathbf{1{,}2^2 = 1{,}44}$	(é pouco)
$\mathbf{1{,}3^2 = 1{,}69}$	(é pouco)
$\mathbf{1{,}4^2 = 1{,}96}$	(é pouco mas está próximo)
$\mathbf{1{,}5^2 = 2{,}25}$	(passou de 2)

Concluímos que 1,4 é uma ***aproximação*** de $\sqrt{2}$ por falta, ou seja, ele é próximo mas é **menor** que o valor que procuramos. Vamos então acrescentar mais uma casa decimal ao 1,4 para continuar nossas tentativas.

$\mathbf{1{,}41^2 = 1{,}9881}$	(é pouco)
$\mathbf{1{,}42^2 = 2{,}0164}$	(passou)

Concluímos agora que 1,41 é uma aproximação por falta de $\sqrt{2}$ melhor que a anterior. Podemos continuar tentando encontrar mais uma casa decimal.

1,413 = 1,9966	(é pouco)
1,414 = 1,9994	(é pouco)
1,415 = 2,0022	(passou)

Temos então que 1,414 é uma aproximação ainda melhor para $\sqrt{2}$. Esse processo pode continuar mas, infelizmente, ***nunca*** conseguiremos encontrar um número decimal cujo quadrado seja exatamente 2. Tudo o que podemos fazer é encontrar aproximações cada vez melhores.

Uma máquina de calcular comum, com tecla de raiz quadrada, faz isso muito bem. Apertando as teclas $\boxed{2}$ e $\boxed{\sqrt{\ }}$ encontramos no visor o número 1,4142135 que é uma excelente aproximação para a raiz quadrada de 2.

Esses números, com infinitas casas decimais e que só podemos conhecer por meio de aproximações, são chamados de números ***irracionais***.

Os números irracionais aparecerão com grande freqüência em nosso curso. Mas, felizmente, em nossos problemas práticos só necessitaremos de aproximações com poucas casas decimais.

Uma aplicação da raiz quadrada

Certo dia, um automóvel vinha em grande velocidade por uma estrada quando um transeunte distraído foi atravessá-la. O motorista pisou fundo no freio, os pneus cantaram no asfalto e felizmente o carro parou a uma pequena distância do assustado pedestre. Um guarda próximo quis logo multar o motorista por excesso de velocidade mas o motorista garantiu que vinha a menos de 80 km por hora, que era a velocidade máxima permitida naquele trecho. Como o guarda poderia saber a velocidade com que vinha o carro?

É possível saber. Em uma freada de emergência os pneus deixam uma marca no asfalto. Medindo o comprimento dessa marca é possível saber, aproximadamente a velocidade com que vinha o carro. A fórmula, obtida através da física, é a seguinte:

$$\mathbf{v = 14{,}6\sqrt{c}}$$

onde **c** é o comprimento da marca deixada pelos pneus em metros e **v** é a velocidade do carro em quilômetros por hora.

Na nossa história, os pneus do carro deixaram gravadas no asfalto uma marca de 43 m. Aplicando a fórmula, teremos:

$$v = 14{,}6 \cdot \sqrt{43} = 14{,}6 \cdot 6{,}56 = 95{,}78$$

ou seja, o carro vinha a aproximadamente 96 km/h e, portanto, seu motorista deveria ser multado.

Propriedades da raiz quadrada

Já sabemos que todo número positivo possui raiz quadrada. Quanto vale a raiz quadrada de zero?

Pense:

Vale zero, é claro, porque $0^2 = 0$. E quanto será a raiz quadrada de -3?

Pense:

Essa não existe, porque quando elevamos qualquer número ao quadrado, o resultado é sempre positivo. Logo, nenhum número negativo possui raiz quadrada. A nossa primeira propriedade será, então:

$$\text{I - Se } a \geqslant 0 \text{ existe } \sqrt{a}\text{. Se } a < 0\text{, não existe } \sqrt{a}$$

A nossa segunda propriedade é uma consequência da definição de raiz quadrada:

$$\text{II - Se } a \geqslant 0\text{, então } \sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$$

A terceira e a quarta propriedades vão nos ajudar a operar com as raízes quadradas:

$$\text{III - Se a e b são positivos, então } \sqrt{ab} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$$

$$\text{IV - Se a e b são positivos (e } b \neq 0\text{), então } \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$$

Observe agora o exemplo seguinte, no qual aplicaremos essas propriedades na solução de uma equação:

EXEMPLO

Use a máquina de calcular para obter aproximadamente (4 casas decimais) a solução positiva da equação.

$$3x^2 = 7$$

Solução:

A primeira coisa a fazer é dividir por 3 para isolar a incógnita.

$$\frac{3x^2}{3} = \frac{7}{3} =$$

$$x^2 = \frac{7}{3}$$

Agora vamos extrair a raiz quadrada. Neste caso, não precisaremos colocar o sinal $\pm$ do lado direito porque o enunciado só nos pede para determinar a solução positiva. Temos então:

$$\mathbf{x} = \sqrt{\frac{\mathbf{7}}{\mathbf{3}}}$$

Observe agora como usamos as propriedades para dar a resposta de outra forma. Pela propriedade IV, podemos escrever

$$\mathbf{x} = \frac{\sqrt{\mathbf{7}}}{\sqrt{\mathbf{3}}}$$

É sempre incômodo ter uma raiz no denominador de uma fração. Para resolver isso, multiplicamos o numerador e o denominador da fração pelo próprio denominador. Chamamos isto de **racionalizar** o denominador.

$$\mathbf{x} = \frac{\sqrt{\mathbf{7}} \times \sqrt{\mathbf{3}}}{\sqrt{\mathbf{3}} \times \sqrt{\mathbf{3}}}$$

Pelas propriedades II e III temos que $\sqrt{3} \times \sqrt{3} = 3$ e ainda, $\sqrt{7} \times \sqrt{3} = \sqrt{7 \times 3} = \sqrt{21}$. Então,

$$\mathbf{x} = \frac{\sqrt{\mathbf{21}}}{\mathbf{3}}$$

Esta é a solução positiva da nossa equação. Usando a máquina, e digitando

$\boxed{2}\boxed{1}\boxed{\sqrt{\ }}\boxed{\div}\boxed{3}\boxed{=}$

encontraremos como aproximação de x o número 1,5275.

Exercícios

Exercício 1

Determine as raízes quadradas

a) $\sqrt{25}$ **b)** $\sqrt{64}$ **c)** $\sqrt{196}$

Exercício 2

Resolva as equações

a) $x^2 = 36$

b) $2x^2 = 98$

Exercício 3

Sem usar a tecla $\boxed{\sqrt{\ }}$ de sua calculadora, determine as raízes abaixo fazendo tentativas e aproximações.

a) $\sqrt{529}$

b) $\sqrt{1156}$

c) $\sqrt{57,76}$

Exercício 4

Determine um valor aproximado para $\sqrt{3}$ com duas casas decimais.

Exercício 5

Se **a** é um número positivo, complete:

a) $\sqrt{a^2} =$

b) $\sqrt{a^4} =$

c) $\sqrt{a^6} =$

Exercício 6

Simplifique as raízes fatorando o número que está em baixo do radical.

Exemplo: $\sqrt{512} = \sqrt{2^9} = \sqrt{2^8 \cdot 2} = \sqrt{2^8} \cdot \sqrt{2} = 2^4 \cdot \sqrt{2} = 16\sqrt{2}$
(Para recordar as regras de operações com potências reveja a aula 14.)

a) $\sqrt{12}$

b) $\sqrt{144}$

c) $\sqrt{800}$

Exercício 7

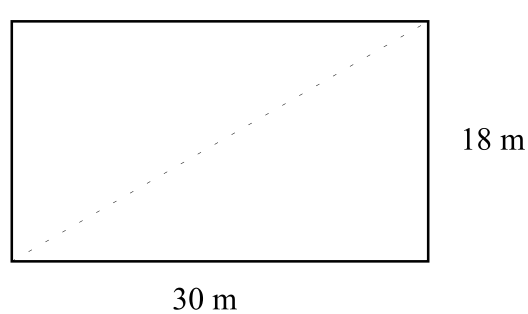
Racionalize os denominadores e dê valores aproximados (com 2 decimais) para as frações abaixo.

a) $\dfrac{10}{\sqrt{2}}$

b) $\dfrac{6}{\sqrt{3}}$

Exercício 8

Uma certa quadra de futebol de salão tem 30 m de comprimento e 18 m de largura. Determine um valor aproximado para o comprimento de sua diagonal.



Exercício 9

Na casa de João existe um quarto cujo chão é quadrado e tem 12 m² de área. Quanto mede, aproximadamente o lado desse quadrado?