Calculando distâncias sem medir

Introdução

No campo ocorrem freqüentemente problemas com medidas que não podemos resolver diretamente com ajuda da trena. Por exemplo: em uma fazenda, como podemos calcular a distância entre dois pontos se existe um morro no meio?

- É claro que, observando o desenho acima, se esticarmos uma trena de A até B, subindo e descendo o morro, encontraremos um valor maior que o correto. Lembre-se de que quando falamos de ***distância*** entre dois pontos estamos considerando que a medida foi feita sobre a ***reta*** que une esses dois pontos. No nosso exemplo essa medida não pode ser calculada diretamente.

- Também na cidade, a altura de um edifício ou mesmo de um poste são medidas difíceis de serem calculadas diretamente. Vamos mostrar, então, que com o auxílio da semelhança de triângulos e do Teorema de Pitágoras podemos descobrir distâncias sem fazer o cálculo direto das medidas.

Nossa aula

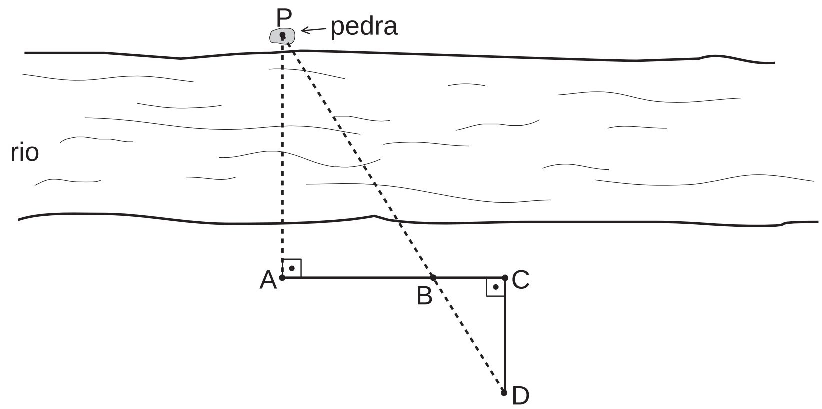
Para determinarmos medidas no campo precisamos de uma trena, algumas estacas, um rolo de barbante e, para algumas situações, um esquadro. As estacas e o barbante formam triângulos; a trena mede os comprimentos, enquanto o esquadro formará ângulos retos.

Acompanhe então os problemas desta aula e suas criativas soluções.

EXEMPLO 1

A largura de um rio

Estamos em uma fazenda cortada por um rio bastante largo. Temos uma trena de 20 m e a largura do rio parece ser muito maior que isso. O que podemos fazer para determinar a largura desse rio? Observe o desenho.

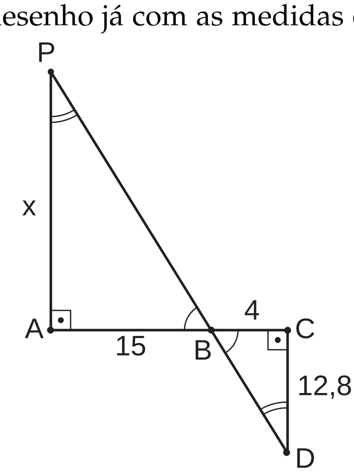


As pessoas que vão fazer as medidas estão na parte de baixo do desenho. Elas procuram na outra margem algum objeto para fixar a atenção. Imagine então que uma das pessoas, estando no ponto **A**, veja uma pedra **P** do outro lado do rio. Para determinar a distância **AP** fazemos o seguinte.

- Fixamos uma estaca no ponto **A** e amarramos nela um barbante. O barbante é esticado até um ponto **C** qualquer, de forma que o ângulo **PÂC** seja reto;
- Fixamos uma estaca em **C**. Sobre o barbante esticado **AC** devemos agora escolher um ponto **B** qualquer, que, de preferência, esteja mais próximo de **C** que de **A**.
- Fixamos então uma estaca em **B**.
- Riscamos agora no chão uma reta que parte de **C** e faz ângulo reto com o barbante, como mostra o desenho. Vamos caminhando sobre essa reta até que a estaca **B** esconda atrás de si a pedra **P** que está do outro lado do rio. Isto faz com que os pontos **P**, **B** e **D** do desenho fiquem em linha reta. Ora, na margem de baixo todas as distâncias podem ser medidas. Suponha então que os valores encontrados tenham sido os seguintes:

$$\mathbf{AB = 15\ m}$$
$$\mathbf{BC = 4\ m}$$
$$\mathbf{CD = 12{,}80\ m}$$

Observe o próximo desenho já com as medidas encontradas e os ***ângulos iguais*** assinalados.

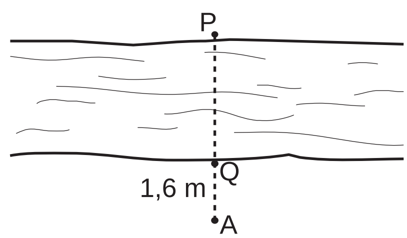


Os triângulos **ABP** e **CBD** são semelhantes porque possuem os mesmos ângulos. Logo, seus lados são ***proporcionais***. Fazendo a distância **AP** igual a **x** temos a proporção:

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{12,8}} = \frac{\mathbf{15}}{\mathbf{4}}$$

$$\mathbf{x} = \frac{\mathbf{12,8 \times 15}}{\mathbf{4}} = \mathbf{48m}$$

Falta pouco agora. Medimos então a distância da estaca **A** ao rio.



Suponha que encontramos **PQ = 1,60 m** (Veja o desenho.) Então, a largura do rio é

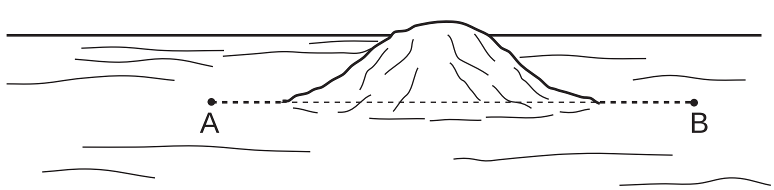
$$\mathbf{PQ = 48 - 1,6 = 46,4\ m}$$

Tendo resolvido o problema da largura do rio, vamos ver agora como se resolve o problema da distância entre dois pontos com o obstáculo no meio.

EXEMPLO 2

A distância entre dois pontos com um obstáculo no meio

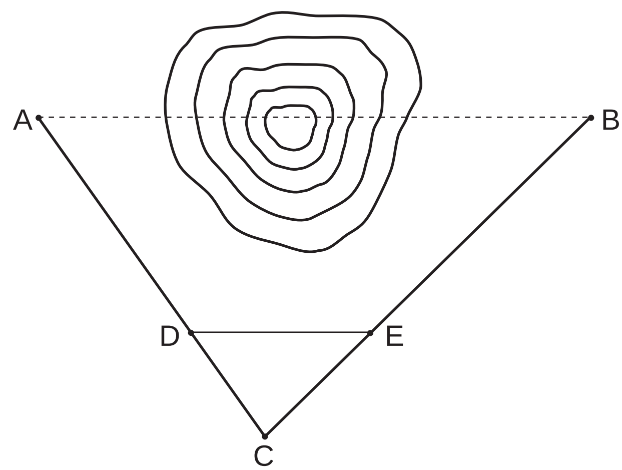
Estamos ainda fazendo medições em nossa fazenda. Temos agora que calcular a distância entre dois pontos **A** e **B** situados de tal maneira que, se você estiver em um deles, não aviste o outro.



No nosso caso, o terreno em volta do morro é razoavelmente plano, mas os pontos **A** e **B** estão de tal forma localizados que medir diretamente a distância entre eles em linha reta é impossível. O que podemos fazer?

Como do ponto **A** não podemos ver o ponto **B**, a solução não pode ser feita da mesma forma que no problema anterior. Procuramos então encontrar um ponto **C** de onde se possa avistar os pontos **A** e **B**.

A figura a seguir mostra a nossa situação vista de cima.



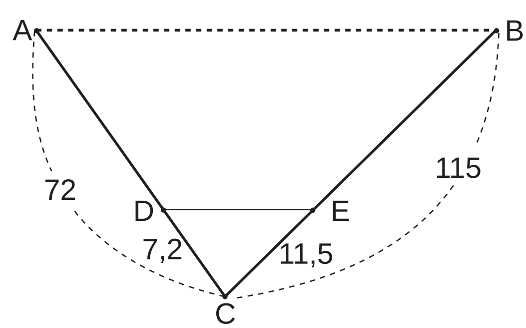
Fixamos então uma estaca em **C** e medimos com a trena (aplicada várias vezes) as distâncias **AC** e **BC**. Os valores encontrados foram os seguintes:

$$\mathbf{AC = 72\,m}$$
$$\mathbf{BC = 115\,m}$$

Agora, vamos dividir essas distâncias por um número qualquer. Por exemplo:

$$\frac{\mathbf{72}}{\mathbf{10}} = \mathbf{7{,}2} \quad \text{e} \quad \frac{\mathbf{115}}{\mathbf{10}} = \mathbf{11{,}5}$$

Sobre a reta **AC** fixamos uma estaca no ponto **D**, onde **DC = 7,2 m**. Sobre a reta **BC** fixamos uma estaca no ponto **E**, onde **EC = 11,5 m**. O que temos então?



Criamos o triângulo **CDE** que é ***semelhante e dez vezes menor*** que o triângulo **CAB**. Podemos medir agora a distância **DE**.

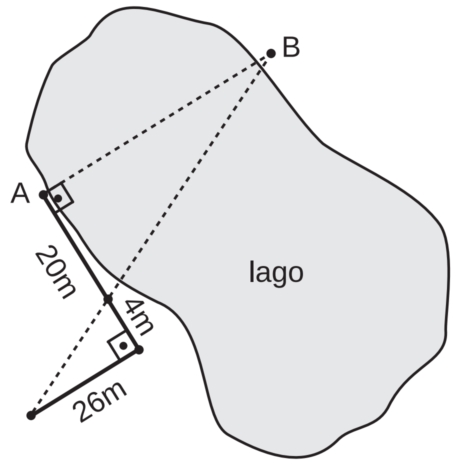
Se encontramos **DE = 12,3 m**, como sabemos que **AB** é ***dez vezes maior*** que **DE**, temos que **AB = 123 m.** O problema está resolvido.

Resumindo, para calcular uma distância que não pode ser medida diretamente devemos formar com ela um triângulo e, em seguida, um outro semelhante bem menor.

Medindo os lados desse triângulo menor e utilizando a semelhança dos triângulos, podemos calcular o lado desconhecido no triângulo maior.

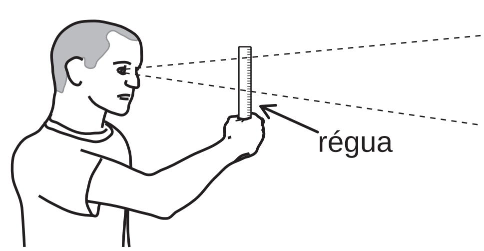
Exercício 1

Para calcular a distância entre os pontos **A** e **B** situados próximos a um lago foi utilizada a mesma técnica vista no problema da largura do rio. Com as medidas que estão no desenho, determine a distância.

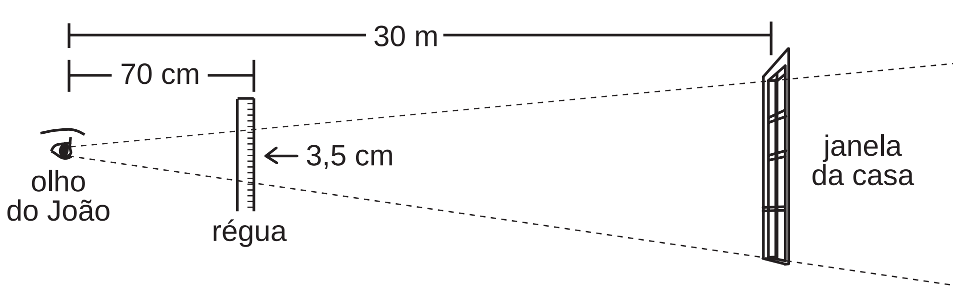


Exercício 2

João está em sua varanda desenhando a casa que está do outro lado da rua. Ele sabe que sua distância até esta casa é de 30 m. Para conhecer as medidas da casa ele usa o seguinte artifício: segurando com o braço esticado uma régua e fechando um olho ele "mede" os detalhes da casa (tamanho das janelas, portas, altura do telhado etc.).

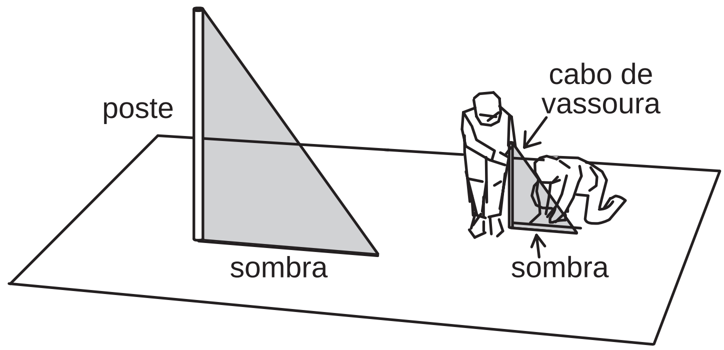


Sabe-se que a distância do olho de João até a régua é de 70 cm. Observando uma das janelas da casa, João verificou que sua altura, medida na régua, era de 3,5 cm. Qual é a medida real dessa janela?
(Sugestão: Observe o desenho a seguir e use semelhança de triângulos. Nos cálculos use todas as distâncias na mesma unidade.)



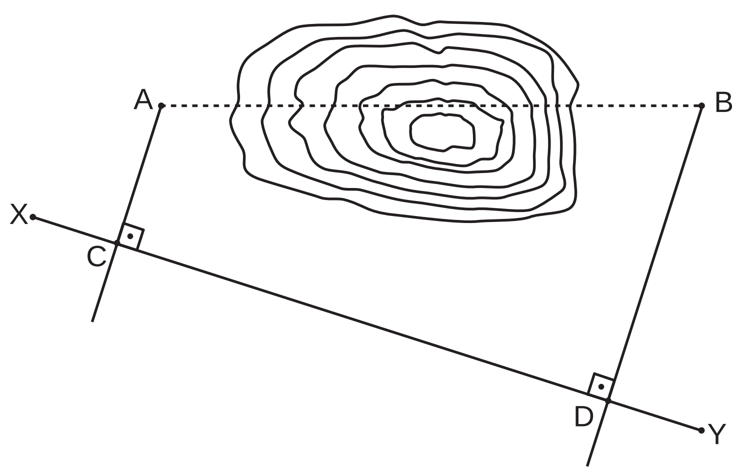
Exercício 3

Para medir a altura de um poste, João observou que em certo momento ele fazia uma sombra no chão de 3,40 m de comprimento. Ele colocou então na vertical, um cabo de vassoura com 110 cm de comprimento e verificou que sua sombra era de 44 cm. Qual é a altura do poste?
(Sugestão: Levando em conta que os raios do sol são paralelos, observe que os dois triângulos formados pelo poste e pelo cabo de vassoura com suas respectivas sombras são semelhantes.)



Exercício 4

Para calcular a distância entre dois pontos **A** e **B** com um obstáculo no meio podemos usar um outro método:



Estique um barbante no chão, e prenda-o nas estacas **X** e **Y**. Amarre um outro barbante em **A** e encontre uma posição para que ele esticado faça ângulo reto com **XY**. Fixe então uma estaca no ponto **C**. Faça o mesmo com outro barbante amarrado em **B**, encontre o ponto **D**, e fixe uma estaca nesse lugar. Sabendo que foram encontradas as seguintes medidas **AC = 22 m**, **CD = 68 m** e **DB = 56 m**, calcule a distância **AB**.
Sugestão: No desenho, trace por **A** uma paralela a **CD** até formar um triângulo. Observe que esse triângulo é retângulo e que os dois catetos são conhecidos. Use então o Teorema de Pitágoras.