AULA

4

O método aritmético e o método algébrico

Introdução

Se você esteve bem atento na aula passada, na qual conhecemos os "problemas com **x**", deve ter percebido que aquele problema das idades do casal poderia ter sido resolvido sem que fosse preciso usar **x**. Vejamos como. O problema dizia:

> *Certa mulher é casada com um homem 7 anos mais velho que ela. Quando a primeira criança do casal nasceu, a soma das duas idades era 79. Qual era a idade da mulher?*

Podemos raciocinar da seguinte maneira. Se o homem e a mulher tivessem a mesma idade, a idade dela (ou dele) seria, é claro, metade da soma; e a soma seria o dobro da idade da mulher. Como o marido é 7 anos mais velho, o dobro da idade da mulher foi aumentado de 7 anos, somando 79 anos.

Logo, o dobro da idade da mulher é:

$$\mathbf{79 - 7 = 72}$$

E a idade da mulher é:

$$\mathbf{72 \div 2 = 36}$$

C.Q.D.! Isto é, ***Como queríamos demonstrar***, pois foi este o resultado que encontramos na outra aula.

A aula de hoje traz outros problemas, que podem ser resolvidos tanto pelo método aritmético (como fizemos agora), como pelo método algébrico, "ou método do **x**".

Qual é o melhor para cada problema? A matemática não decide isso por nós: ela apenas enriquece nosso conhecimento com vários métodos para resolver problemas, e deixa a escolha para nós. Pois cabe a cada pessoa escolher por si mesma, já que a Matemática também é parte da vida.

Sendo assim, papel e lápis! Porque também não existe "matemática de cabeça", e vamos à aula de hoje!

Nossa aula

Vamos ver como resolver um mesmo problema por métodos diferentes.

No exemplo seguinte, temos mais uma questão sobre idades. Compare a solução pelo método aritmético e a solução pelo método algébrico. Você verá que chegaremos ao mesmo resultado.

> *" Sou cinqüentão", afirmou Paulo (querendo dizer que tinha cinqüenta e poucos anos). "E hoje é um dia cabalístico" (isto é, mágico). "Pois não apenas a idade da minha mulher, Jurema, mais jovem do que eu, se escreve ao contrário da minha, como a diferença entre as nossas idades é igual à idade que nossa filha comemora hoje: 9 anos!"*

Quantos anos tem Paulo? Uma tal data "cabalística" como essa se repetirá algum dia?

Tente descobrir a idade de Paulo, raciocinando apenas com números, sem utilizar **x**, ou seja, raciocinando aritmeticamente.

Resolvendo pelo método aritmético

O caminho mais simples para resolver o problema pelo método aritmético, neste caso, parece ser pelo raciocínio das tentativas. Assim, vamos fazer diretamente as contas em cada uma das possibilidades para a idade de Paulo - cinqüenta e poucos anos:

IDADE DE PAULO	IDADE DE JUREMA	DIFERENÇA (= 9?)	
51	15	36	(não)
52	25	27	(não)
53	35	18	(não)
54	45	9	(sim)
55	55	0	(já não serve: Jurema é mais jovem)

Portanto, Paulo tem 54 anos, e sua mulher, 45.

Quanto à segunda pergunta, fica para você responder. Continue usando o método das tentativas. No próximo ano, Paulo terá 55 anos, e Jurema, 46 (cujo contrário é 64, e não 55 - o que Paulo não consideraria "cabalístico"), e assim por diante. Procure!

Resolvendo pelo método algébrico

A pergunta é: qual a idade de Paulo "cinqüentão"?

Vamo chamar a idade de Paulo de:

5x , isto é, (**50 + x**) anos

dezenas **unidades**

E a idade de Jurema de:

x5, isto é, (**10x + 5**) anos

dezenas **unidades**

Sabemos que a diferença entre as idades é de 9 anos. Logo,

$$\begin{aligned} (50 + x) - (10x + 5) &= 9 \\ 50 + x - 10x - 5 &= 9 \\ -9x + 45 &= 9 \\ -9x &= 9 - 45 \\ x &= \frac{-36}{-9} = \mathbf{4} \end{aligned}$$

A idade de Paulo, então, é 54 anos (como encontramos antes).

Que método é mais fácil? E mais rápido?

No exemplo relativo à idade de Paulo, talvez você ache mais fácil aplicar o método aritmético. Basta organizar um pouco o raciocínio, fazendo uma tabela, e procurar o par de números "contrários" que satisfaça o que se pede.

Já o método algébrico é mais rápido, e também mais geral: adapta-se imediatamente a vários problemas. (Veja os exercícios, depois.)

Mas isso foi nesse exemplo. Em outros problemas, pode ser diferente. É isso que é bom, pois a própria escolha inicial do método a ser empregado já desenvolve nosso raciocínio e nossa criatividade.

Veremos agora um problema que pode ser resolvido por, pelo menos, três métodos: um aritmético, um algébrico e um gráfico. Deixamos para você opinar, neste caso, sobre qual deles é o mais fácil, ou o mais rápido, ou o mais geral etc.

Outro problema... e três métodos de resolução

Estou com uns amigos numa mesa de bar. Tenho na carteira R$15,70. Quanto posso deixar minha despesa alcançar, se também pretendo deixar como gorjeta para o garçom 10% sobre essa despesa?

Resolvendo pelo método aritmético

Fazendo algumas tentativas com o valor da despesa, observo que, para cada 10 reais de despesa, deixarei mais 1 real para o garçom, totalizando esse gasto 11 reais, ou R$11,00. Para cada 1 real de despesa, deixarei 10 centavos, gastando assim R$1,10. Vamos, então, acrescentando novos gastos como esses, até a soma se aproximar do que tenho (R$15,70). Veja a tabela, com valores em R$:

DESPESA	GORJETA	GASTO REAL	SOMA	
10	1	11	11	
1	0,10	1,10	12,10	
1	0,10	1,10	13,20	
1	0,10	1,10	14,30	
1	0,10	1,10	15,40	
0,10	0,01	0,11	15,51	
0,10	0,01	0,11	15,62	
0,10	0,01	0,11	15,73	(mais do que tenho)

Observe que, após a quinta linha de despesa, não valeria a pena continuar somando 1 real, pois isso levaria o total do gasto a mais de 16 reais - quantia de que não disponho. Por isso, continuamos com valores simples menores, de R$0,10 de despesa. Sendo assim, a tabela mostra que, nesse caso, posso deixar minha despesa alcançar apenas o que consta da última linha. Ou seja:

10 + 4 + 0,20 = **14,20 reais**

Resolvendo pelo método algébrico

Vamos dar nomes (ou símbolos) aos componentes do problema:

- x - para o valor que a despesa pode alcançar
- 0,1x - para a gorjeta = 10% de x = (10/100) · x
- 1,1x - para o gasto = x + 0,1x

Então, eu quero saber qual o valor de **x** para que o meu gasto no bar não ultrapasse R$15,70.

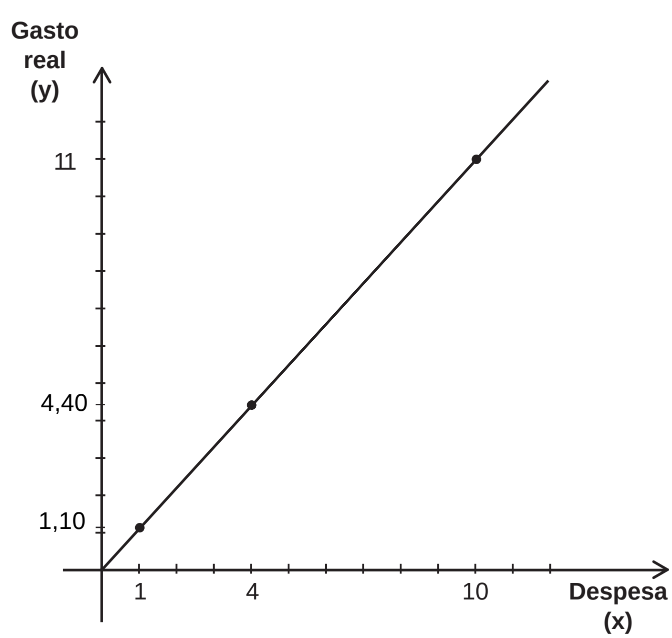
1,1x = 15,70 (ou menor que isso)
x = 14,27 - um pouco mais que 14,20. Como antes.

De fato, se a minha despesa for R$14,20, a gorjeta será de R$1,42 ao todo, e terei gasto R$14,20 + R$1,42 = **R$15,62**, como encontramos na solução aritmética.

Resolvendo pelo método gráfico

Podemos também nos assegurar dessa resposta visualizando o problema num gráfico. Por exemplo, marca-se no eixo horizontal a despesa e, no vertical, a despesa aumentada de 10%, quer dizer, o gasto real. E marcando neste gráfico alguns valores conhecidos, como aqueles da tabela do item **Resolvendo pelo método aritmético**.

DESPESA	GASTO REAL
10	11
1	1,10
4	4,40



É fácil notar que esses três pontos do tipo (x,y) = (despesa, gasto) que encontramos na tabela, bem como quaisquer outros que calculemos, formam uma reta que passa pela origem dos eixos. De fato, isso acontece porque o gasto é proporcional à despesa: ou seja, se a despesa for, por exemplo, 10 vezes maior, o gasto também será 10 vezes maior. Realmente, vimos que, de fato, um deles é múltiplo do outro: gasto = (1,1) × despesa.

Aqui é bom fazer uma pequena pausa para tratarmos de sinais matemáticos. É que, em álgebra, convém trocar o sinal de vezes (×) pelo ponto (·), para não confundir com a letra **x**.

Tradicionalmente, a matemática utiliza os seguintes sinais:

× e · para a multiplicação
e
e : para a divisão.

Por isso, se você encontrar:

gasto = (1,1) · despesa

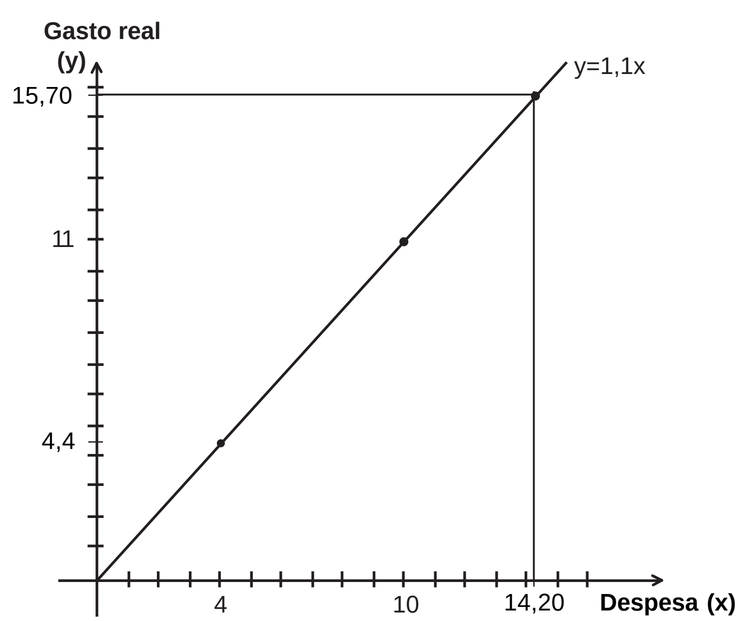
é a mesma coisa que

gasto = (1,1) × despesa

Algumas vezes, você também vê uma multiplicação na qual o sinal não aparece. Podemos escrever, por exemplo, o produto de **a** por **b** de três formas:

a × **b**, **a** · **b** ou simplesmente **ab**

Assim, para sabermos que a despesa corresponde ao gasto de, no máximo, R$15,70, marcamos este número no eixo vertical e procuramos pela despesa no eixo horizontal:



Fazendo isto com cuidado, vimos que a despesa pode ser de até R$14,20, ou um pouco mais alta - como concluímos pelos outros dois métodos. Aqui estão alguns exercícios para você praticar. A lição mais importante desta aula, entretanto, não foi dita até aqui. É esta:

Resolver um mesmo problema por dois métodos diferentes pode lhe dar uma grande segurança quanto às respostas. Se elas forem iguais, é bem possível que suas respostas estejam certas. "E se forem diferentes?", você perguntaria. Neste caso, é claro que uma das respostas está errada!

Saber que estamos errados também é uma forma de acertar. Concorda? O grande cientista Einstein teria dito, certa vez, que não se importava quando alguém apontava um erro em suas teorias; na verdade, até gostava. Por quê? Ele dizia que, tendo sido encontrado esse equívoco, isso o colocava mais perto da verdade, pois já não estava se enganando.

Grande Einstein! São palavras que nos fazem pensar, não é mesmo?

Exercícios

Exercício 1

Use o gráfico do último problema desta aula para encontrar que despesa posso fazer para não ultrapassar os gastos abaixo, deixando ainda 10% para o garçom:

a) R$ 8,80
b) R$ 9,02
c) R$ 19,80

Exercício 2

Resolva o Exercício 1 aritmeticamente, completando a tabela dada na aula. Compare com as respostas encontradas naquele exercício.

Exercício 3

Resolva o exercício 1 algebricamente, usando a equação que relaciona despesa e gasto no problema de gorjeta de 10%. Compare com as respostas dos exercícios anteriores.

Exercício 4

Se eu decidisse deixar 20% de gorgeta para o garçom , em vez de 10%, quanto poderia ter de despesa?

a) Solução aritmética:
b) Solução algébrica:
c) Solução gráfica: