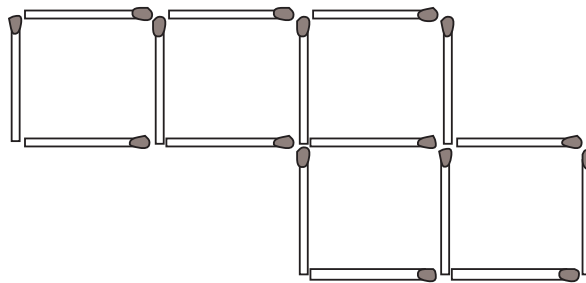


Equacionando os problemas

Introdução

Nossa aula começará com um quebra-cabeça de mesa de bar – para você tentar resolver agora.

Observe esta figura feita com palitos de fósforo. Mova de lugar exatamente 2 palitos, de modo a transformá-la em 4 quadrados iguais, sem sobrar nenhum palito. Você pode fazer isso com palitos ou no desenho.



Nossa Aula

Conseguiu resolver o quebra-cabeças? Não? Então, vamos resolvê-lo juntos, pelo caminho da matemática. Certos problemas não nos parecem, de início, “problemas de matemática” – mas, de repente, vemos que existe uma solução para eles que pode ser chamada de **solução matemática**. (Na realidade, o que existe na vida prática não são problemas de matemática – mas soluções matemáticas, criadas pelas pessoas para resolver problemas práticos).

O quebra-cabeça é um exemplo. A princípio, pode não estar bem claro qual matemática usar. Geometria? Aritmética? De fato, o quebra-cabeça envolve tanto figuras geométricas quanto números.

Se você ainda não conseguir resolvê-lo, talvez seja porque não tenha percebido que o quebra-cabeça tem dois aspectos: o **geométrico** e o **numérico**. Talvez também tenha lhe faltado equacionar o problema. Isto é: escolher quem será a incógnita – geralmente chamada de **x** – e escrever a equação satisfeita por essa incógnita. A partir daí – sempre deixando claro qual é a pergunta do problema –, basta resolver a equação: quer dizer, “encontrar o **x** do problema”, como se costuma dizer.

Quando conseguimos equacionar um problema, vemos claramente o que é conhecido (pela equação) e o que se procura (a incógnita). Assim, o caminho da solução, que leva de uma coisa à outra, muitas vezes salta aos olhos nesse equacionamento. Vejamos no quebra-cabeça.

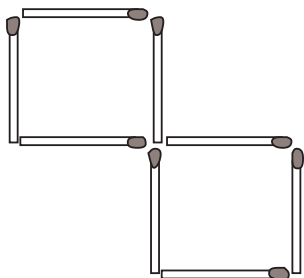
O que vemos na figura dada? Vemos 5 quadrados iguais. Eles estão unidos e são feitos com palitos de fósforo. O problema pede que os 5 quadrados se transformem em 4 quadrados iguais, só com o movimento de 2 palitos.

Que figura formarão, então, os 4 quadrados? Se soubermos isso, será bem mais fácil formar a tal figura... e o problema estará resolvido.

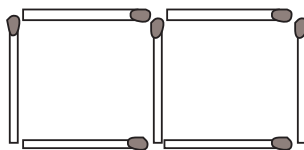
Dois quadrados juntos podem ser formados de um dos seguintes modos:

- a) os quadrados **não têm** lado (palito) comum; ou
- b) os quadrados **têm** um lado comum.

Qual a diferença importante no caso de quisermos formar uma ou outra destas figuras? Pense.



2 quadrados *com* lado comum



2 quadrados *sem* lado comum

A diferença é numérica: em **a)**, precisamos de 8 palitos; já em **b)**, precisamos de apenas 7 – pois “economizamos” um palito quando os quadrados são vizinhos, tendo um lado comum.

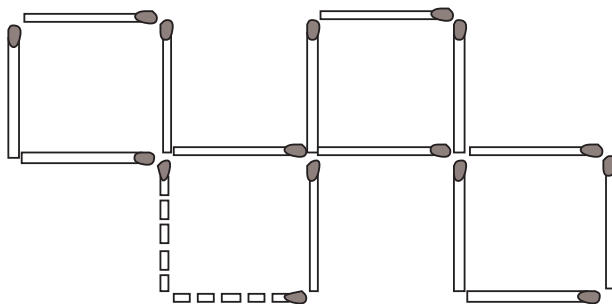
E no nosso caso? Queremos formar 4 quadrados, sem que sobrem palitos. Qual é a pergunta crucial aqui? Pense.

Isso mesmo! A pergunta é: “Quantos palitos temos?”

É só contar: temos 16 palitos. Se cada quadrado possui 4 palitos e queremos formar uma figura com 4 quadrados – desde que não permitamos que dois quadrados sejam vizinhos (“de parede”, isto é, de lado comum) – usaremos:

$$4 \times 4 = 16 \text{ palitos. Exatamente o que temos!}$$

Algumas tentativas irão lhe mostrar que, desenhando ou fazendo 4 quadrados com 16 palitos, o desenho que devemos procurar formar é este:



Está resolvido. Não lhe parece mais fácil, agora?

Pois então. Tudo teve uma seqüência muito natural, desde o momento em que equacionamos o problema, contando o número de palitos e tentando visualizar claramente o que havia sido pedido – neste caso, a forma da figura dos 4 quadrados.

Equacionando um problema algébrico

Rigorosamente falando, equacionar um problema envolve escrever a equação (ou as equações) de modo que ela expresse em linguagem matemática o que foi dado no problema em linguagem comum.

Vejam, então, como fazer isso com problemas algébricos, ou melhor, com **problemas que admitem solução algébrica**.

EXEMPLO 1

Qual é o número cujo dobro, mais 5, é igual a 17?

Equacione o problema, chamando o número desconhecido de **x**. Vimos que não importa a letra que usamos para designar a incógnita, isto é, o número procurado – mas é universal o uso do **x**. O fato importante é que:

$$2x + 5 = 17$$

A partir daí, acharíamos **x**. (Você pode tentar, se quiser). Só que nesta aula estamos mais interessados no **equacionamento** dos problemas – que é a primeira etapa. Geralmente, essa é a etapa mais importante na resolução desses problemas.

Vamos relembrar os momentos fundamentais desse equacionamento.

- Quando encaramos o tal número procurado como a incógnita do problema, e o chamamos de **x**;
- Quando traduzimos em “matematuquês” o que está dado em português, ou seja, quando escrevemos a equação matemática que é satisfeita por essa incógnita. Neste exemplo, faríamos assim:

$$x = \text{número}$$

$$\text{O que sabemos: } 2x + 5 = 17$$

Para reconhecer **x**, é só resolver a equação. Encontra-se **x = 6**. Verifique.

Vamos ver outros exemplos de equacionamento de problemas. É interessante que você, em cada caso, experimente responder a estas duas perguntas do equacionamento, antes de continuar a leitura:

- a) O que é **x**, neste caso? (Qual é a incógnita?)
- b) O que sabemos sobre **x**? (Qual é a equação?)

EXEMPLO 2

Quanto deve medir de lado (em km) um terreno quadrado, para que o número que vai expressar seu perímetro (em km) seja o mesmo que o número que expressa sua área (em km²)? Procure a solução!

Em primeiro lugar, vamos responder às duas perguntas principais do equacionamento:

a) x = lado

b) O que sabemos: $4x = x$

perímetro área

Aqui, vamos lembrar que um número (ou incógnita) ao quadrado é esse número (ou incógnita) multiplicado por ele mesmo. Então:

$$4x = x \cdot x$$

E, logo, adivinhamos um número x que satisfaz esta equação. Qual é?

Ora até visualmente fica claro que a expressão $4x = x$, acima, é verdadeira quando substituímos x por 4, pois temos:

$$4 \cdot 4 = 4 \cdot 4$$

Portanto, se o lado do terreno quadrado for 4 quilômetros, satisfará o que é pedido.

Uma observação importante: a equação $4x = x$ é uma equação de 2º grau. Por isso, (como recordaremos) deve ter outra raiz, ou seja, outro número para substituir o x . A outra raiz é zero, pois zero vezes qualquer número é zero. Mas, neste caso, o terreno teria lado nulo, quer dizer, não existiria. (Dizemos que, neste caso, $x = 0$ é uma **solução degenerada**).

EXEMPLO 3

- Qual o número cuja metade é a sexta parte de 42? E de 21?
- E qual o número cuja metade é a sexta parte de seu triplo?

A primeira pergunta é equacionada assim:

$$x = \text{número}$$
$$\text{O que sabemos: } \frac{x}{2} = \frac{42}{6}$$

7
1

A partir daí fica fácil: multiplicando os dois lados por 2, teremos $x = 14$.

A segunda pergunta é equacionada assim:

$$x = \text{número} \quad 7$$

$$\text{O que sabemos: } \frac{x}{2} = \frac{21}{6} \quad 2$$

Logo, multiplicando os dois lados por 2, temos $x = 7$.

Já a terceira pergunta é bem diferente:

$$x = \text{número}$$

$$\text{O que sabemos: } \frac{x}{2} = \frac{3x}{6} \quad \text{isto é, } x = x$$

Você pode dar exemplo de um número que pode substituir x e fazer a sentença ser verdadeira? Pense.

Claro: qualquer número serve! Pois $x = x$ é verdadeiro para todo x , já que todo número é igual a si mesmo.

Assim, $x = x$ não é propriamente uma equação. Dizemos que é uma **identidade**, pois é verdadeira para todo x .

EXEMPLO 4

O marcador de gasolina do meu automóvel apresenta um erro e desejo conhecê-lo. Assim, poderei compensá-lo nas próximas leituras do marcador. Há pouco ele marcava $3/4$ do tanque, e precisei de 10 litros para enchê-lo completamente. A capacidade do tanque é de 50 litros. Qual o erro percentual que o marcador apresenta? Para mais ou para menos?

Qual deve ser a incógnita nesse problema: você diria que é o erro percentual procurado (quer dizer, quantos por cento do tanque)?

O primeiro cuidado do equacionamento é a escolha da incógnita, do x . Só é preciso bom-senso para se fazer essa escolha: por exemplo, x deve ser tal que saibamos **logo** usá-lo para escrever a equação do problema.

Assim, é mais razoável fazer da seguinte maneira:

$$x = \text{Volume que havia no tanque (litros)}$$

$$\text{O que sabemos: } x + 10 = 50$$

$$\text{Logo, } x = 40.$$

O que queremos saber:

- erro = ?
- erro percentual = ?%

Mas o volume que o tanque marcava era:

$$\frac{3}{4} \cdot 50 = 37,5$$

Assim:

$$\text{erro} = 40 - 37,5 = 2,5 \text{ (em 40 litros)}$$

Finalmente, em termos de erro percentual, precisamos fazer uma **regra de três**, procurando o erro não em 40, mas em 100 litros.

$$2,5 \text{ — } 40$$

$$y \text{ — } 100$$

Daí,

$$\frac{2,5}{y} = \frac{40}{100}$$

Então, multiplicando os dois lados por 100 y, temos:

$$(2,5) \cdot (100) = 40 y$$

Logo, dividindo por 40 e trocando os lados, temos que

$$y = \frac{250}{40} = 6,25 \text{ (em 100 litros)}$$

Concluimos que o erro percentual apresentado pelo marcador é de 6,25 litros em 100 litros, ou seja, **6,25%** para menos, pois ele marca menos do que devia.

Nesta página e nas seguintes estão alguns problemas para você equacionar, sem necessariamente resolvê-los.

Lembre-se dos dois pontos importantes do equacionamento! “Quais”?! É hora de revisão da aula...

Exercício 1

Considere o seguinte problema: Subtraindo-se 4 de certo número e dividindo-se esse resultado por 2 e, depois, somando-se este novo resultado ao triplo daquele número, sabemos que o resultado é igual a $\frac{4}{5}$ do número mais 7. Qual é o número?

a) Qual é a incógnita?

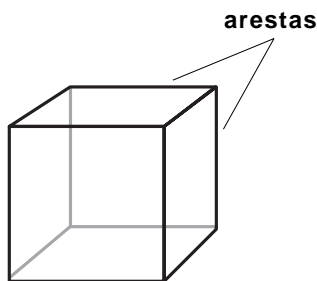
b) Que equação ela satisfaz?

c) O que o problema pede?

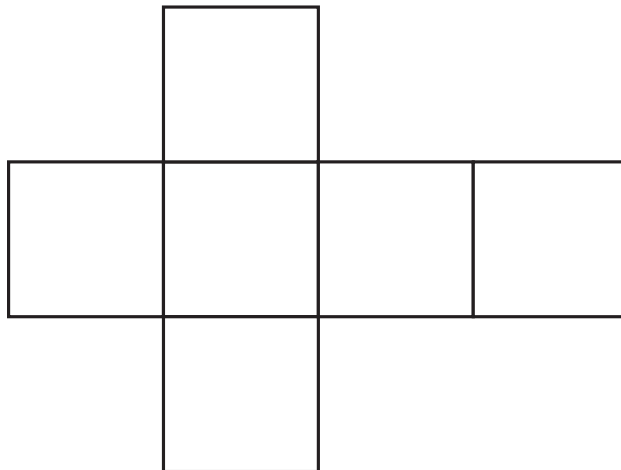
(Atenção: O exercício não pede para resolver o problema. Faça-o se quiser.)

Exercício 2

- a) Faça o mesmo com este problema, parecido com o **Exemplo 2**, visto na aula. Quanto deve medir a aresta (em m) de um cubo, para que o número que expressa a área (em m^2) da superfície lateral total do cubo (formada pelos 6 quadrados que o limitam) seja um número igual ao de seu volume (em m^3)?



cubo



superfície lateral do cubo

- b) Olhando para sua equação, que palpite você arriscaria para o tamanho da aresta procurada?

Exercício 3

- a) Equacione o seguinte problema. A idade de um pai é o triplo da idade de seu filho e, ao mesmo tempo, o filho é 22 anos mais jovem que o pai. Quais as idades deles?
Cuidado: há duas incógnitas! (Chame-as de x e y). E há também duas equações.

- b) Observando atentamente as suas duas equações, você consegue descobrir x e y ? (Pense na diferença entre as idades, vendo-a de dois modos.)

Exercício 4

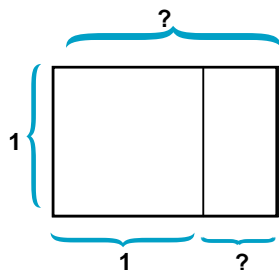
- a) Resolva o item a) do exercício anterior chamando as incógnitas de p e f . Compare as equações com aquelas equações anteriores: o que poderíamos dizer dos valores dessas incógnitas?

- b) Que letras você prefere para as incógnitas, neste problema? Por quê?

Exercício 5

Equacione este problema, que trata do famoso *retângulo áureo*.

O lado menor de um retângulo mede 1 m, e o lado maior é desconhecido. Queremos que esse lado maior seja tal que, quando retirarmos um quadrado de lado 1 m do retângulo, sobre um retângulo semelhante ao retângulo grande – isto é, do mesmo formato que o retângulo grande, com os lados respectivamente proporcionais aos dele.



Sugestão: Chame de x a maior – ou a menor – das duas medidas desconhecidas, na figura. Agora interprete a proporcionalidade entre os lados do retângulo grande e do pequeno em termos de uma equação em x .

Atenção: A equação é de 2º grau. Deixe a resolução para o momento em que estiver lembrado esse assunto, em aulas futuras.

□ O retângulo áureo é igual a um quadrado unido a outro retângulo áureo menor (é importante na natureza, nas artes e na matemática).