AULA

8

Coordenadas

Introdução

O subtítulo da aula de hoje poderia ser este: "Visualizando relações entre números". E esse assunto nos faz lembrar o matemático francês René Descartes (1596-1650). Foi Descartes quem inventou um jeito de visualizar números e relações entre números, que ficou conhecido como ***plano cartesiano*** - um sistema de eixos coordenados.

Os exemplos que aparecem nesta aula mostrarão como os gráficos no plano cartesiano são simples e naturais e, no entanto, profundos e esclarecedores.

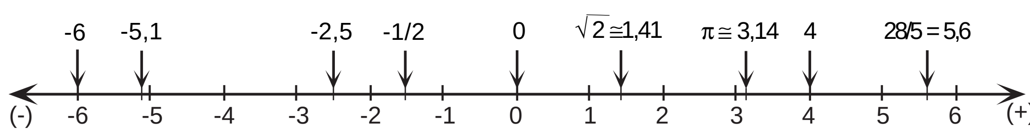
Por enquanto, basta que você se lembre dos gráficos de barras - como aquele que mostra a população do país a cada ano, o seu salário a cada mês, a temperatura de um local a cada hora etc. O plano cartesiano é igualmente fácil, e ainda mais claro visualmente. Vamos a ele!

Nossa aula

Para começar, vamos rever uma conhecida nossa do 1º grau - ***a reta numérica***.

Eis aqui a reta numérica, com alguns números representados nela. Observe as distâncias iguais entre números inteiros consecutivos, como:

$$-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3 \text{ etc.}$$



A reta numérica é ***completa***: cada um dos seus infinitos pontos representa exatamente um número real, e todos os infinitos números reais têm lugar nela. Ela se estende indefinidamente (ou ilimitadamente) nos dois sentidos da horizontal. E é um eixo orientado: quanto mais à direita, maior o número (ex: 10, 100, 1.000, 10.000 etc.); quanto mais à esquerda, menor (ex: - 10, - 100, - 1000, - 10.000 etc.). Assim, por exemplo: -100 é menor do que -10. Escrevemos:

$$-100 < -10$$

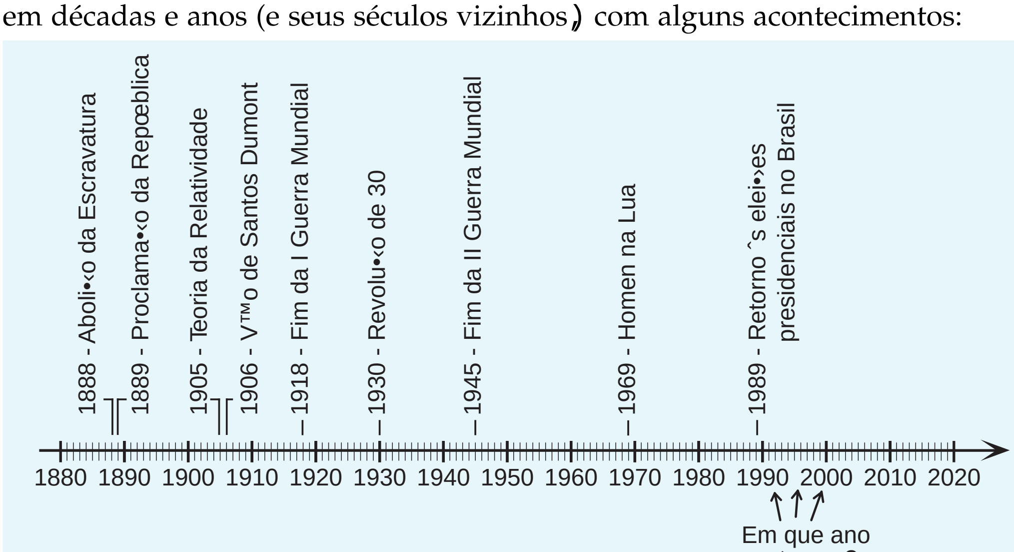
Então, - 100 fica à esquerda de - 10. Pode-se dizer também que - 10 é maior do que - 100 e escrever:

$$-10 > -100$$

Um exemplo de reta numérica: a linha do tempo

A reta numérica tem aplicações práticas muito importantes. Exemplo disso são as linhas do tempo utilizadas em História. Essa reta também pode ser interessante do ponto de vista de nossa própria vida, de nossa história pessoal. Aqui está um trecho dela, dividido em milênios e subdividido em séculos, com exemplos do ano em que nasceram alguns homens e mulheres que ficaram conhecidos, como líderes, cientistas e artistas, entre outros. A linha do tempo nos ajuda a compreender melhor há quanto tempo cada um deles nasceu. Veja:

Vamos agora fazer um "zoom", como se diz em linguagem de computador (ou um "close", em linguagem de fotografia), na reta numérica. Assim podemos visualizar mais de perto (*close*, em inglês) o nosso próprio século XX subdividido em décadas e anos (e seus séculos vizinhos) com alguns acontecimentos:



Você também pode marcar nesta linha do tempo o ano do seu próprio nascimento, e riscar ao longo dela o segmento que corresponde à sua vida até hoje. Por falar nisso: quantos anos você tem? Visualize sua idade nesse segmento. Use outras cores para traçar os "segmentos de vida" de seus familiares. Não fica tudo mais claro com a reta numérica?

Relembrando os gráficos de barras

Vamos relembrar, com o problema que será proposto, o que é um gráfico de barras.

Júlio é um profissional autônomo. Para controlar de perto as finanças familiares, Júlio anota todo mês quanto ganhou e quanto gastou (em reais). Agora ele está analisando a tabela que montou com as anotações de ganhos.

Responda:

a) Em que mês Júlio ganhou mais?

b) Em que mês seu ganho deu maior salto para cima?

c) E para baixo?

MÊS/1994	GANHO (R$)
jan	300
fev	410
mar	540
abr	380
mai	320
jun	500
jul	490
ago	570
set	380
out	430
nov	420
dez	400

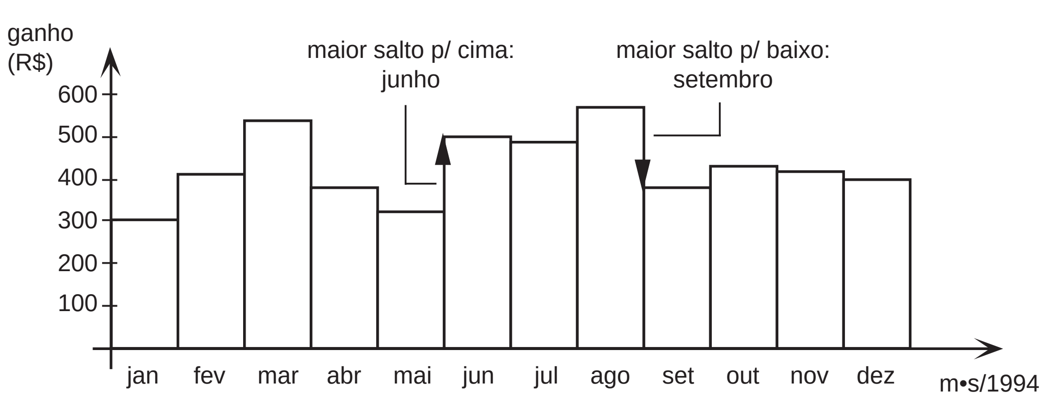
A pergunta do item **a)** é fácil de responder: basta procurar pelo número maior da tabela. (O mês foi agosto: R$ 570,00).

Já os itens **b)** e **c)** não estão com as respostas tão claras. Uma boa sugestão seria ampliar a tabela para incluir também uma coluna com "Diferença em relação ao mês anterior".

Ela começaria com os seguintes dados: fev, 10; mar, 130; abr, - 160 etc.

Continue, e responda **b)** e **c)**.

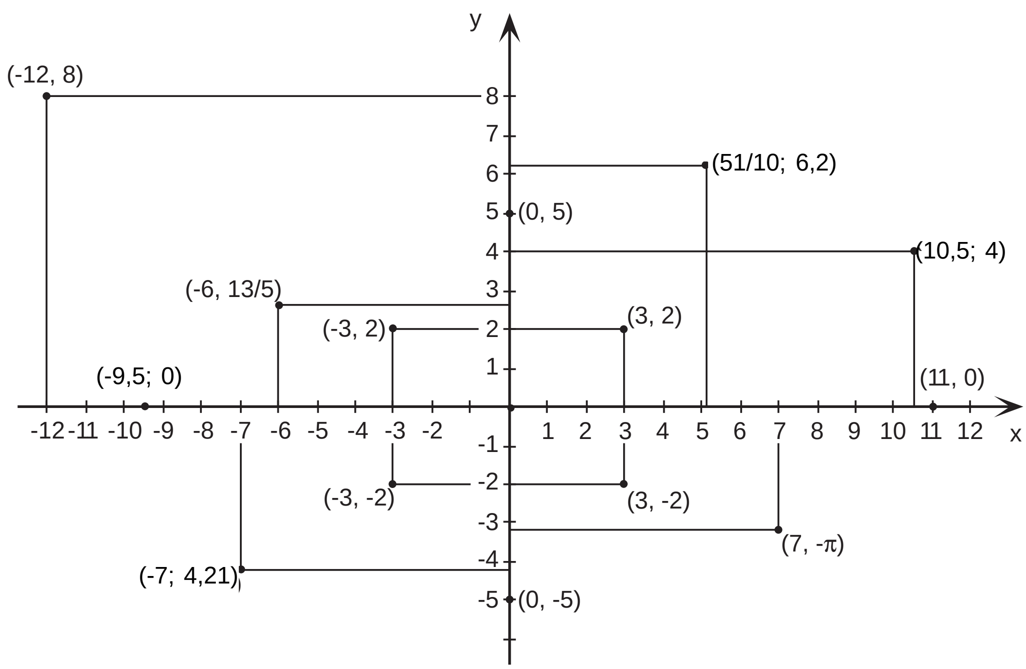
A idéia é fazer um gráfico de barras para que, nele, você visualize as respostas:



Fácil; não é? É por isso que um gráfico tem tanto valor, pois, sem ele, as relações entre os números ficariam bem mais abstratas. Daí a importância da invenção de Descartes, o plano cartesiano. A idéia é igual à de um gráfico de barras, com pequenas mas importantes diferenças: no plano cartesiano, os dois eixos orientados perpendiculares são duas retas numéricas com os dois pontos "0" (zero) superpostos, formando a origem do plano.

O plano cartesiano

Aqui está um exemplo de plano cartesiano, com alguns pontos assinalados. Cada ponto tem duas coordenadas - **x** e **y** - e é simbolizado por (**x, y**); dizemos que **x** é a ***abscissa*** do ponto, e **y** é a ***ordenada***. Se um dos números representados por **x** ou **y** tiver vírgula, podemos separar as duas letras com ponto e vírgula. Exemplo: (2; 1,5).



Para você se certificar de que compreendeu bem como funciona o plano cartesiano, marque nele estes outros pontos :

(7, 3)
(7, 0)
(7, -3)
(-7, 3)
(-11, -3)

Escreva suas coordenadas junto do ponto (como está na ilustração).

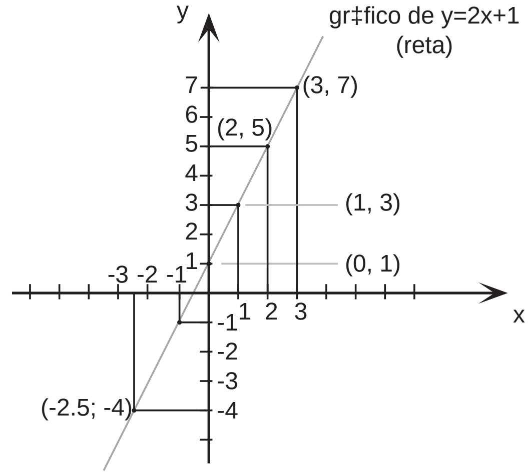
O plano cartesiano é fácil e lógico, não acha? E o melhor está por vir. Quando **x** e **y** não são dois números quaisquer, mas estão ***relacionados*** por alguma fórmula, ou alguma regra, então acontece uma coisa espantosa! Vejamos logo alguns exemplos. E você também concordará conosco que esse invento é mesmo um auxílio e tanto para entender relações entre números.

Dois exemplos de gráficos de relações entre números

Vamos marcar alguns pontos (**x**, **y**) no plano cartesiano, de maneira que **x** e **y** satisfaçam uma relação dada. Para isso, primeiro faremos uma ***tabela*** de valores de **x** e **y**, a partir de alguns exemplos. A primeira relação é esta:

a) $y = 2x + 1$

x	**y = 2x + 1**
1	**3**
2	**5**
3	**7**
0	**1**
- 1	**- 1**
- 2,5	**- 4**



Quanto mais pontos assinalarmos, maior será nossa certeza: se marcássemos todos os pontos $(x, y) = (x, 2x + 1)$ para todos os valores de **x**, então teríamos desenhado uma reta. Ela é o ***gráfico*** da relação $y = 2x + 1$, e é formada por todos os pontos (x, y) do plano, tais que $y = 2x + 1$.

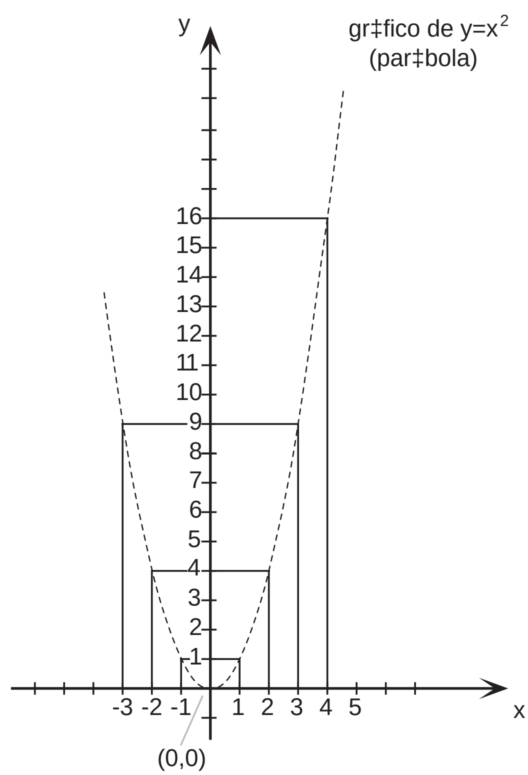
Por exemplo: o ponto (2, 5) está nesta reta, pois $5 = 2 \cdot (2) + 1$; já (2, 6) não está, pois $6 \neq 1 \cdot (2) + 1$. Verifique.

Lembrete: em matemática, quando queremos escrever uma igualdade usamos o sinal de igual (=); quando queremos mostrar uma diferença, usamos o sinal de diferente (≠).

Outro exemplo: como será o gráfico dos pontos (x, y), tais que **y** seja o número que mede a área de um terreno quadrado de lado **x**, ou seja, tais que $\mathbf{y = x^2}$?

b) $y = x^2$

x	$\mathbf{y = x^2}$
2	**4**
1	**1**
0	**0**
- 1	**1**
- 2	**4**
3	**9**
- 3	**9**
4	**16**
2,5	**6,25**



O gráfico da relação **$y = x^2$** é uma curva importante na geometria e na física: uma ***parábola***. A parábola é, por exemplo, a curva descrita no ar por uma bola chutada, ou qualquer objeto arremessado. Você também já deve ter ouvido falar em antena parabólica: sua forma é derivada da parábola.

Calcule e marque outros pontos da parábola $y = x^2$. Que tal usar números fracionários?

Conclusão

Esses exemplos são suficientes para nos convencer da importância do plano cartesiano: tanto na solução de problemas da vida prática (área de terrenos, salários, gastos etc), quanto no próprio desenvolvimento da matemática. Com o plano cartesiano, Descartes criou a ferramenta visual para o que veio logo depois: o ***cálculo diferencial e integral***. Esse cálculo foi uma verdadeira revolução na matemática, do mesmo modo que foram revolucionárias as suas aplicações em outras ciências, a exemplo da física, da biologia e da astromonia, e também em várias áreas, como em economia e até em psicologia.

Para nós, o plano cartesiano também será de grande auxílio. Vamos nos exercitar nele?

Exercícios

Exercício 1

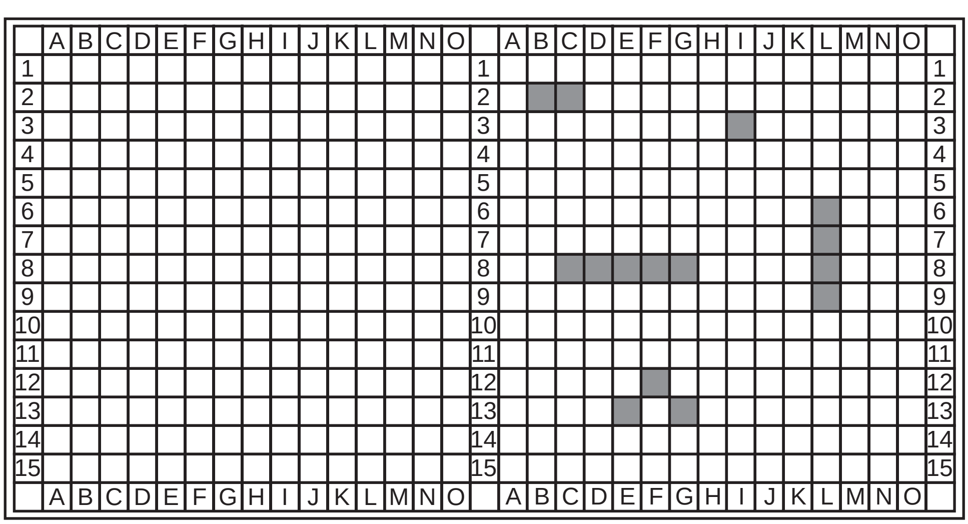
A figura mostra um joguinho muito popular: a Batalha Naval. Consiste em um tabuleiro quadriculado, no qual a posição de cada quadradinho é dada pelo eixo horizontal, com letras (A, B, C, ...) e, pelo eixo vertical, com números (1, 2, 3, ...).

Aqui estão algumas das peças da Batalha Naval, dadas por seus quadradinhos. Preencha os quadradinhos no quadro à esquerda e veja como são essas peças:

- submarino: E7
- destroyer: G4, G5
- hidroavião: L4, M3, N4
- cruzador: B11, C11, D11, E11
- couraçado: L9, L10, L11, L12, L13

Diga que quadradinhos do quadro à direita estão formando estas peças:

- submarino:
- destroyer:
- hidroavião:
- cruzador:
- couraçado:



No Exercício 2, o gráfico é outra curva importante de geometria: uma **hipérbole**. Por exemplo, a trajetória que um corpo momentaneamente atraído pela Terra descreve no espaço pode ser uma hipérbole, ou mesmo uma parábola. Já a trajetória da Terra em volta do Sol é uma elipse, como descobriu Johannes Kepler (1571-1630).

Exercício 2

Use o plano cartesiano para comparar o tamanho e a forma de todos os terrenos retangulares que têm a mesma área - digamos, de 12 km^2. Ou seja, use o gráfico de todos os pontos (x, y) tais que, se **x** e **y** forem lados de um desses retângulo, então $\mathbf{x \cdot y = 12}$. Ou, dividindo tudo por **x** (que não pode ser zero), então $\mathbf{y = \frac{12}{x}}$.
Faça como nos exemplos vistos: tabela e gráfico em papel quadriculado.

Exercício 3

Quais destes pontos devem pertencer ao gráfico de $\mathbf{y = 2x + 1}$? Por quê?

a) (5, 11)

b) (4, 11)

c) (- 11, - 20)

d) $(\pi,\ 2\pi + 1)$

e) $(-\frac{1}{2};\ 0{,}1)$

f) (200, 401)

Exercício 4

Quais destes pontos se encontram sobre a parábola $\mathbf{y = x^2}$? Por quê?

a) (- 4, 16)

b) (10, 102)

c) (10, 100)

d) $(\sqrt{2},\ 2)$

e) (7, - 49)

f) (- 7, - 49)