AULA

9

O gráfico que é uma reta

Introdução

Agora que já conhecemos melhor o plano cartesiano e o gráfico de algumas relações entre **x** e **y**, voltemos ao exemplo da aula 8, onde **y = 2x + 1** e cujo gráfico é uma reta.

Queremos saber mais sobre como é essa ligação que existe entre a fórmula **y = 2x + 1** e a figura geométrica da reta. Queremos saber, por exemplo, se outras fórmulas também têm como gráfico uma reta. Caso haja, o que essas fórmulas de retas têm em comum; de que modo se parecem?

É isso que estudaremos hoje. Como você verá, são muitas as situações na vida cotidiana - especialmente nas nossas diversas profissões - em que a relação entre duas grandezas é expressa graficamente por um reta. Veremos isso num exemplo com um automóvel em movimento, na relação entre a distância percorrida e o tempo de percurso. E deixaremos para você aplicar as mesmas idéias na sua própria área de trabalho: na construção civil, na indústria, no comércio, no trabalho em casa etc.

A conclusão da aula é que a Matemática tem uma maneira de visualizar toda uma série de problemas, facilitando imensamente sua resolução.

Nossa aula

Um exemplo tirado do futebol

Talvez você já tenha visto um comentarista de futebol dizer o seguinte, analisando um determinado chute a gol: "*A velocidade da bola era de aproximadamente 90 km/h, quando foi espalmada pelo goleiro.*" O que significa isso? Como se faz essa estimativa de velocidade?

Se um automóvel estivesse a 90 km/h, isso quer dizer que ele percorreria 90 quilômetros de distância no tempo de 1 hora. Possivelmente, a estimativa do comentarista deve ter sido calculada por computador da seguinte maneira: pelo vídeo do chute, é anotado o instante em que o pé do jogador toca a bola e a posição em que ele está no campo; é anotado também o instante em que o goleiro espalma a bola e a posição do goleiro. Assim, obtém-se a ***distância*** que a bola percorreu e o ***tempo*** que levou para isso. O que é a velocidade da bola, então?

Se, para simplificar, considerarmos que a velocidade da bola ***é constante ao longo de toda sua trajetória***, então, por definição:

Velocidade é a distância percorrida dividida pelo tempo de percurso.

Rigorosamente falando, isso não é verdade, pois o atrito do ar diminui a velocidade da bola o tempo todo. Estamos simplificando as coisas.) Em linguagem matemática:

$$\boxed{\textbf{velocidade} = \frac{\textbf{espaço}}{\textbf{tempo}} \ \textbf{ou v} = \frac{\textbf{e}}{\textbf{t}}}$$

No caso desse chute, a velocidade equivale a 90 km/h. Em metros por segundo (pois as medidas do campo de futebol são em metros e cada chute se dá em frações de segundo), ela é de:

$$v = 90\,km/h = \frac{90km}{1h} = \frac{\cancel{90} \times 1000m}{\underset{40}{\cancel{3600}}s} = 25\,m/s$$

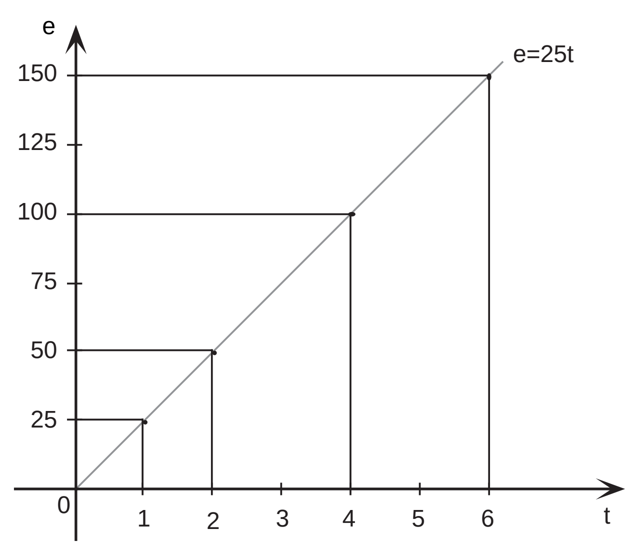
Ou seja, a bola percorre um espaço de ***25 metros a cada segundo***. Ou 50 metros a cada 2 segundos, ou 100 metros a cada 4 segundos, ou 150 metros a cada 6 segundos, e assim por diante.

É fácil visualizar de uma só vez a relação do espaço (**e**) percorrido com o tempo (**t**) de percurso - que neste exemplo é:

$$\frac{e}{t} = 25, \text{ ou } e = 25\,t$$

Para isso, basta construir uma tabela e um gráfico que mostre a maneira como o espaço se relaciona com o tempo:

t	e = 25t
0	0
1	25
2	50
4	100
6	150



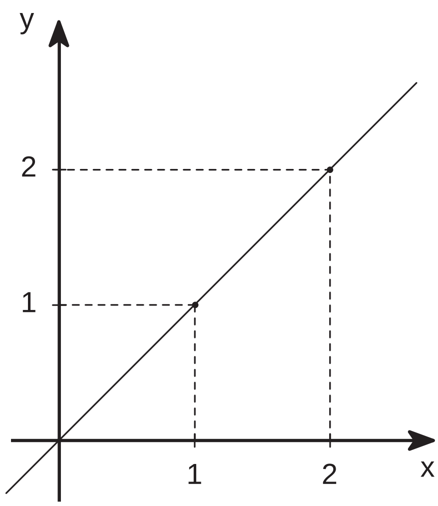
Como vemos, neste caso, temos uma reta que passa pela origem do plano cartesiano. Observe que, nesse exemplo, os eixos do plano cartesiano representam **e** (espaço) e **t** (tempo), que são grandezas diferentes: uma é medida em metros e outra, em segundos, respectivamente. Dessa forma, a marcação dos pontos sobre os eixos pode ser feita também com unidades diferentes. No eixo vertical, cada unidade equivale a 25 metros; enquanto no eixo horizontal cada unidade corresponde a 1 segundo.

O gráfico de y = ax: retas pela origem

Observe os exemplos a seguir:

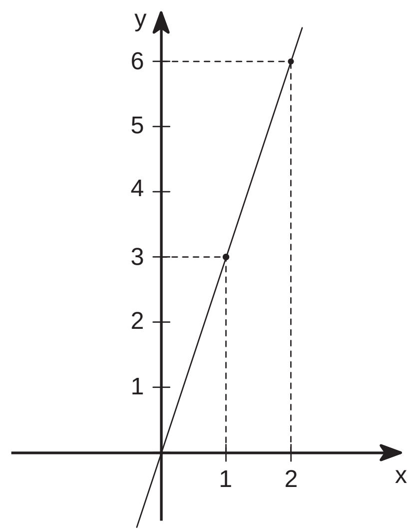
a) $y = x$

x	y
0	0
1	1
2	2



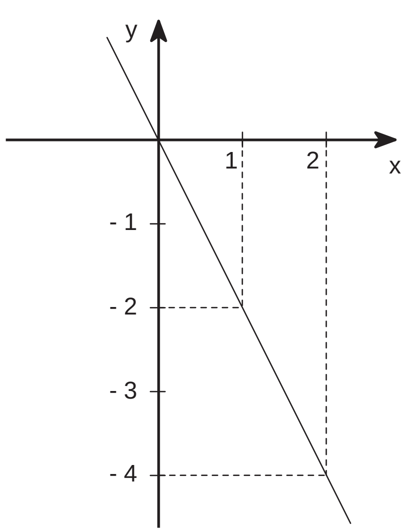
b) $y = 3x$

x	y
0	0
1	3
2	6



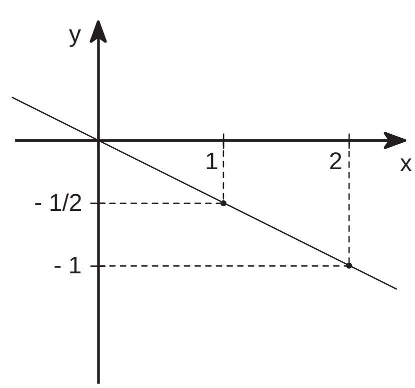
c) $y = -2x$

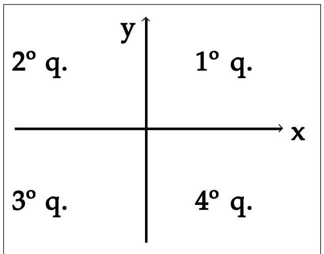
x	y
0	- 0
1	- 2
2	- 4



d) $y = -\frac{1}{2}x$

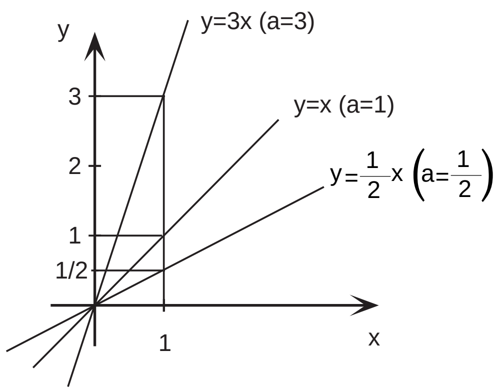
x	y
0	0
1	$-\frac{1}{2}$
2	- 1

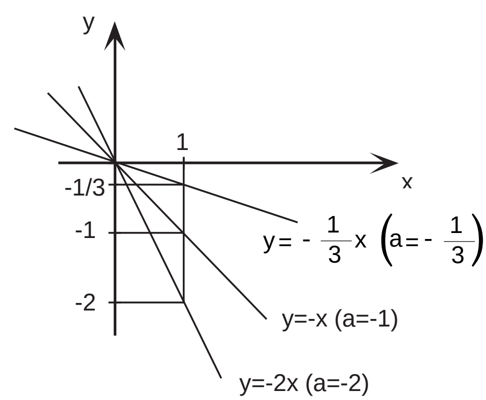




OS 4 QUADRANTES
DO PLANO CARTESIANO

Como você mesmo deve ter notado, o gráfico de **y = ax** (no qual **a** é uma constante) é sempre uma reta. Quando **a** é positivo, a reta está no 1º e no 3º quadrantes do plano cartesiano; quando **a** é negativo, a reta está no 2º e no 4º quadrantes. Veja nos exemplos abaixo:





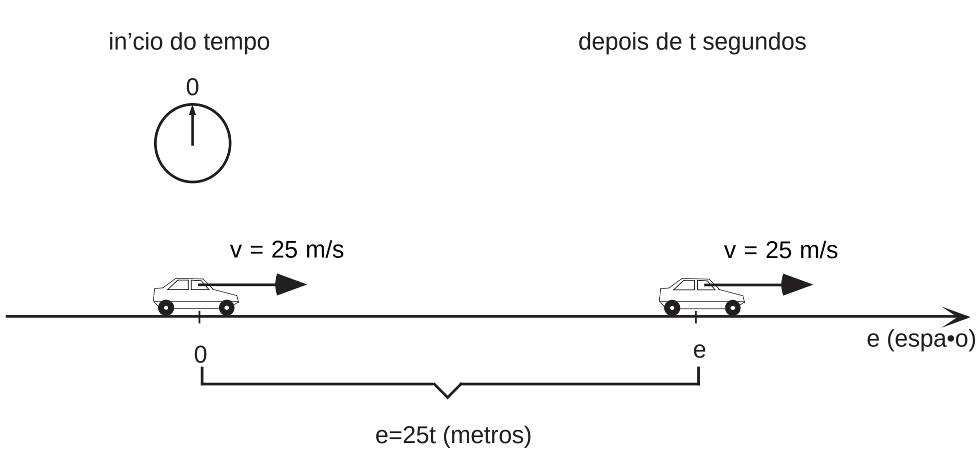
Voltando ao exemplo da velocidade

O gráfico da relação **e = 25 t**, que vimos no início da aula, mostra, para cada instante de tempo **t**, o espaço **e** percorrido pela bola de futebol, desde o início do movimento até o instante **t**.

Você se lembra de que verificamos que:

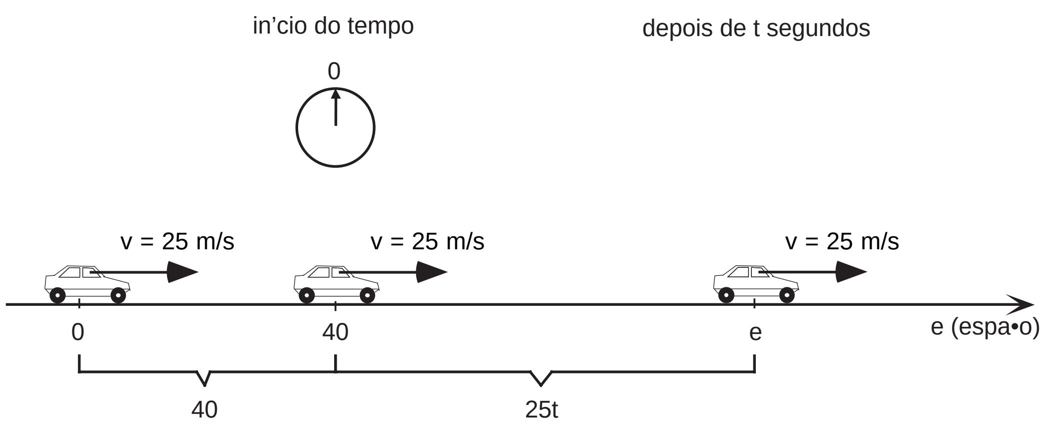
v = 25 m/s é equivalente a **v = 90 km/h**

Imagine agora um carroque se desloca a uma velocidade de **90 km/h**, ou seja, sua velocidade é de **25 m/s**. Na figura abaixo, ilustramos isso, imaginando o eixo **e** como o próprio caminho do carro para ajudar na visualização. Desenhamos no carrouma seta **v**, sempre do mesmo tamanho, para representar sua velocidade constante:



O gráfico da página 64 já falou tudo sobre este exemplo, não é mesmo? Vê-se logo que o carro tinha percorrido 25 metros após 1 segundo do início da contagem do tempo; 50 metros após 2 segundos, 75 metros após 3 segundos etc.

Agora vamos mexer um pouco no exemplo. No total, quantos metros teria percorrido o carro se o cronômetro só tivesse sido disparado para começar a contagem do tempo depois de o carro já haver percorrido 40 metros?



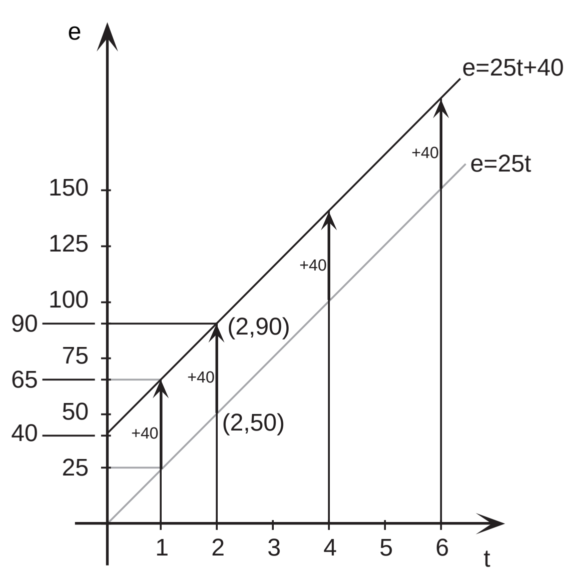
No total, o carro teria percorrido **25t** (como antes) mais **40 metros**. É fácil obter o novo gráfico do espaço percorrido em relação ao tempo, para **e = 25t + 40**. Acompanhe como o espaço inicial, que aqui é de **40 metros**, aparece nas linhas da nova tabela e no gráfico, deslocando a reta anterior para cima em **40 unidades** (40 metros).

TABELA ANTERIOR:

t	e = 25t
0	0
1	25
2	50
4	100
6	150

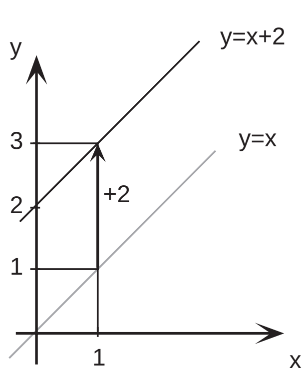
TABELA NOVA:

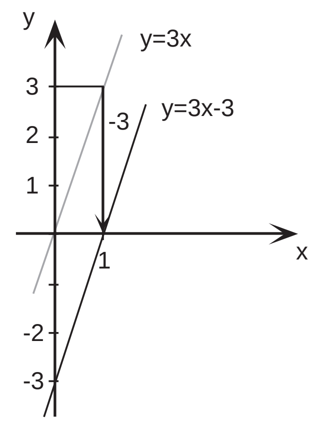
t	e = 25t + 40
0	0 + 40 = 40
1	25 + 40 = 65
2	50 + 40 = 90
4	100 + 40 = 140
6	150 + 40 = 190

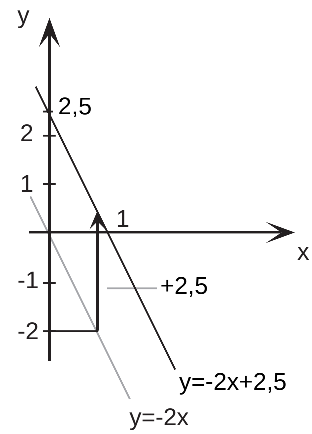


O gráfico de y = ax + c: retas quaisquer

Nos exemplos abaixo, construímos gráficos de equações do tipo **y = ax + c**. Esses gráficos foram obtidos somando-se c unidades aos gráficos dos exemplos anteriores, cujas equações eram do tipo **y = ax**.







Observe que, quando **c** é positivo, a reta de **y = ax + c** corta o eixo **y** acima da origem; e quando **c** é negativo, corta o eixo **y** abaixo da origem.

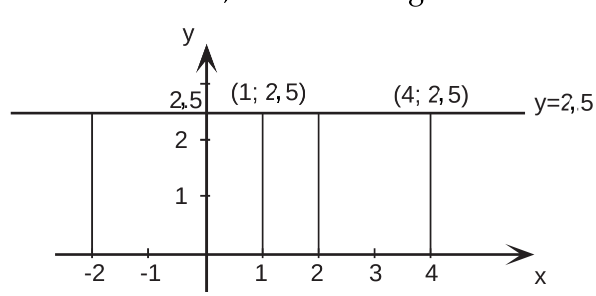
Um caso particular: retas horizontais

Os diversos gráficos de **y = ax** já nos mostraram que a constante **a** está relacionada com a inclinação da reta. Quando **a** é positivo (reta no 1º e 3º quadrantes), dizemos que a reta tem ***inclinação positiva***; quando **a** é negativo (reta no 2º e 4º quadrantes), dizemos que a reta tem ***inclinação negativa***.

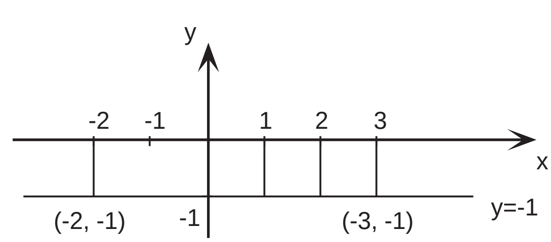
Como a reta de **y = ax + c** é a reta de **y = ax** deslocada de **c** para cima (se **c > 0**) ou para baixo (se **c < 0**), a inclinação permanece igual. Confira nas figuras: as retas são paralelas, tendo a mesma inclinação.

Para quem está atento, uma pergunta logo surge: que dizemos da inclinação, quando **a** não é positivo nem negativo, mas nulo (**a = 0**)? Dizemos que a inclinação é ***nula***. E como será uma reta **y = ax + c** com **a = 0**, ou seja, tal que **y = c** (para todo **x**)? Aqui estão duas delas, com tabela e gráfico:

x	**y = 2,5**
0	**2,5**
1	**2,5**
2	**2,5**
4	**2,5**
- 2	**2,5**



x	**y = - 1**
0	**- 1**
1	**- 1**
2	**- 1**
4	**- 1**
- 2	**- 1**



Veja que efeito teve anular **a** na relação **y = ax + c**: ficamos com **y = c**, cujo gráfico é uma ***reta horizontal***.

Já conhecemos retas inclinadas de vários modos e, agora, retas horizontais. Que tipo de reta nos falta encontrar? Pense.

Outro caso particular: retas verticais

Relembre que obtivemos retas horizontais anulando o coeficiente **a** de **x** na relação **y = ax + c**. Poderíamos encontrar as retas que nos faltam, as verticais, fazendo a mesma coisa com **y** - ou seja, anulando o seu coeficiente? Do jeito que está não - porque o coeficiente de **y** é 1. Mas se incluírmos também um coeficiente (b) para **y**, então, quando ele for nulo, teremos as retas verticais: é o caso dos dois últimos dos próximos exemplos.

O gráfico de ax + by = c: exemplos

Vamos desenhar estes gráficos de retas, usando uma tabela auxiliar:

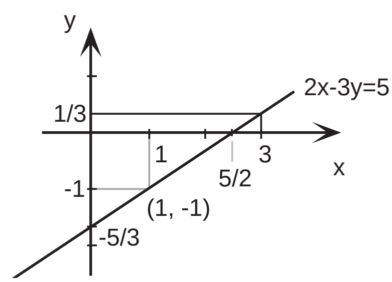
a)

$2x - 3y = 5$

$-3y = -2x + 5$

$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$

x	$y = \frac{2}{3}x - \frac{5}{3}$
0	$-5/3 = -1{,}6$
5/2	0
1	-1
3	1/3



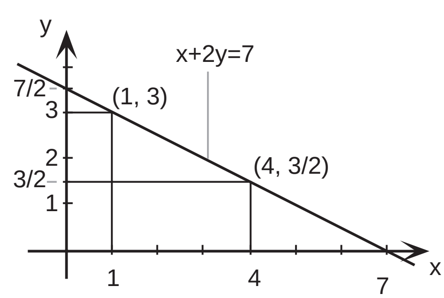
b)

$x + 2y = 7$

$2y = -x + 7$

$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$

x	$y = -\frac{1}{2}x + \frac{7}{2}$
0	$7/2 = 3{,}5$
7	0
1	3
4	3/2



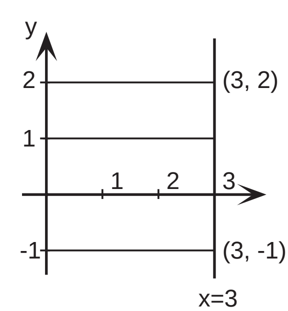
c)

$x + 0y = 3$

$x = 3$

(para todo y)

x	y
3	0
3	1
3	2
3	-1



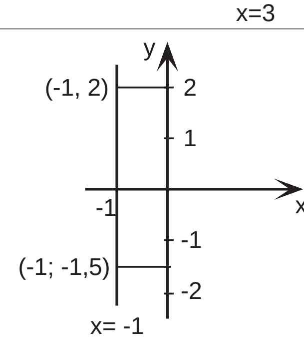
d)

$x + 0y = -1$

$x = -1$

(para todo y)

x	y
-1	0
-1	2
-1	-1, 5



Conclusão: a relação **x = c** (onde **c** é uma constante) é representada no plano cartesiano por uma reta vertical: à direita da origem se **c > 0**, e à esquerda se **c < 0**.

"E se **c = 0**?" A reta de **x = 0** é o próprio eixo **y**.

Além desta conclusão, os dois primeiros exemplos nos mostram claramente como é o gráfico da relação geral **ax + by = c**, quando **a** e **b** não são nulos: é uma reta inclinada que corta o eixo **x** no ponto $(\frac{c}{a}, 0)$ e o eixo **y** em $(0, \frac{c}{b})$. Confirme isso nos exemplos.

Sendo assim, já sabemos traçar o gráfico de qualquer reta, isto é, de qualquer relação entre **x** e **y** do tipo **ax + by = c**. Vamos praticar?

Exercícios

Atenção: Para os exercícios desta aula, é interessante você trabalhar com papel quadriculado, pois ele ajuda no traçado de gráficos.

Exercício 1

a) Para cada reta abaixo, faça uma tabela auxiliar e use-a para traçar o gráfico da reta. (Desenhe todas as retas num mesmo plano cartesiano).

a1) $y = \frac{12}{5}x$

a2) $y = \frac{12}{5}x + 2$

a3) $y = \frac{12}{5}x - \frac{2}{5}$

a4) $12x - 5y = 7$

b) Qual destas retas tem maior inclinação?

c) Em termos geométricos, o que podemos dizer destas quatro retas?

Exercício 2

a) Observando o gráfico de **e = 25t + 40**, do espaço total (em metros) percorrido pelo automóvel até o instante **t**, responda: qual o espaço total percorrido até:

a1) 2 segundos?

a2) 4 segundos?

a3) 3 segundos?

a4) 1,5 segundo?

b) Confirme suas respostas pela tabela.

Exercício 3

a) Com base no gráfico de $e = 25t + 40$, trace no mesmo plano cartesiano o gráfico de $e = 25\,t + 75$.

b) O que significa esse 75 no lugar de 40, no exemplo do automóvel?

Exercício 4

a) Observe, a seguir, cada uma das relações que envolvem **x** e **y**, e faça o que se pede. Escreva ao lado de cada uma: (H) se o gráfico da relação for uma reta horizontal; (V) se for uma reta vertical; (I +) se for uma reta de inclinação positiva; e (I –) se for de inclinação negativa.

a1) $y = 2x - 1$

a2) $x = 5$

a3) $y = -3x$

a4) $x = \pi$

a5) $x = 5 - y$

a6) $y = -2$

a7) $3y - 4x = 12$

b) Usando uma tabela auxiliar, trace o gráfico de cada reta, e confirme sua resposta anterior.

Exercício 5

Aqui estão algumas retas na forma **ax + by = c**. Use o último comentário da aula para responder o que se pede em seguida (ou use as sugestões).

:

reta 1: $\rightarrow$ $7x + 2y = -14$
reta 2: $\rightarrow$ $x - 3y = 0$
reta 3: $\rightarrow$ $-12x - 31y = 1$
reta 4: $\rightarrow$ $-7x - 2y = 14$
reta 5: $\rightarrow$ $3x + 5y = 8$

a) Em que ponto a reta corta o eixo **x**? (Sugestão: Faça **y = 0** e calcule **x**)

b) E o eixo **y**? (Sugestão: Faça **x = 0** e calcule **y**).

c) Em que casos esses dois pontos bastam para traçar a reta?