AULA

21

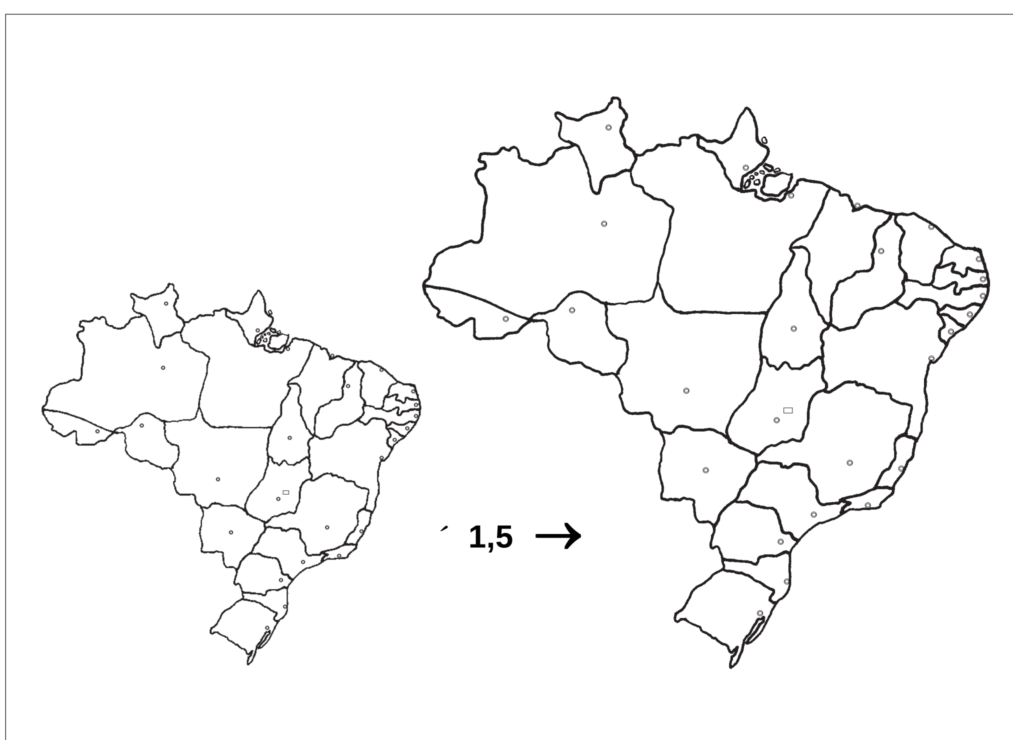
Semelhança e áreas

Introdução

Na Aula 17, estudamos o Teorema de Tales e a semelhança de triângulos. Nesta aula, vamos tornar mais geral o conceito de semelhança e ver como se comportam as áreas de figuras semelhantes. Dizemos que duas figuras são semelhantes quando uma é ***ampliação*** da outra. Mas, o que significa ***ampliar***?

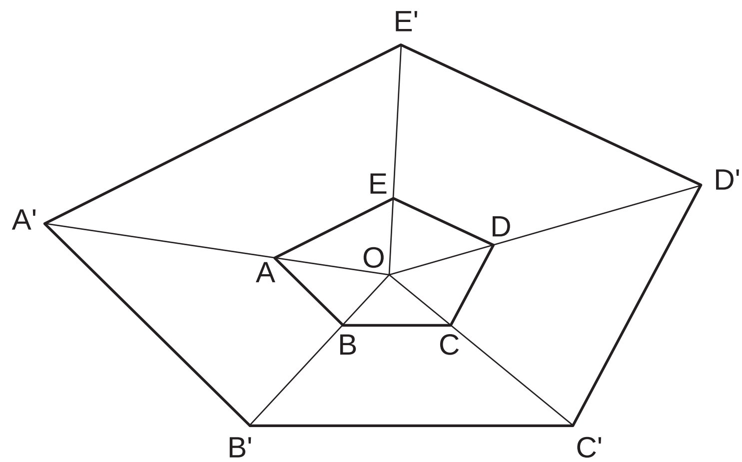
Ampliar (ou reduzir) uma figura significa obter uma outra com a mesma forma mas de tamanho diferente. Numa ampliação, todos os comprimentos ficam multiplicados por um mesmo número. Numa redução, todos os comprimentos ficam divididos por um mesmo número.

Veja abaixo o mapa do Brasil em dois tamanhos diferentes, onde estão assinaladas as capitais dos estados. O maior é uma ampliação do menor em 1,5 vezes. Isto significa que todas as distâncias medidas no mapa maior são iguais às mesmas distâncias do mapa menor multiplicadas por 1,5. Você pode verificar isso com o auxílio de uma régua.



Nossa aula

Duas figuras são semelhantes quando todas as distâncias de uma delas são iguais às da outra, multiplicadas por um fator constante. Para tornar essa definição mais clara, vamos mostrar inicialmente um método que nos permite ampliar uma figura. Suponha que desejamos tornar o polígono ABCDE da figura abaixo três vezes maior. Escolhemos então um ponto O qualquer, unimos esse ponto a cada um dos outros e triplicamos todos os comprimentos: OA, OB, OC, OD e OE. O novo polígono A' B' C' D' E' é o ***triplo*** de ABCDE.

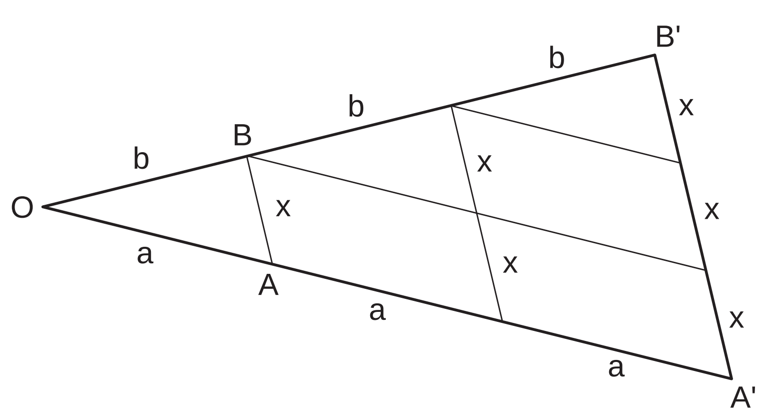


Na figura acima, fizemos OA' = 3 . OA, OB' = 3 . OB, OC' = 3 . OC e assim por diante. Observe então o que acontece: os lados do polígono maior são ***paralelos*** aos lados do polígono menor, e cada lado do polígono maior é o triplo do lado correspondente ao polígono menor. Em linguagem matemática:

$$A'B' \ // \ AB \quad e \quad A'B' = 3 \cdot AB$$
$$B'C' \ // \ BC \quad e \quad B'C' = 3 \cdot BC$$
$$C'D' \ // \ CD \quad e \quad C'D' = 3 \cdot CD$$

e assim por diante. Repare ainda que essas relações valem também para outros segmentos que não estão desenhados. Por exemplo, as diagonais A'D' e AD são paralelas e a maior é o triplo da menor.

A figura a seguir explica por que, ao construirmos OA' = 3 · OA e OB' = 3 · OB, encontramos um segmento A'B' paralelo a AB e de comprimento três vezes maior que AB. Observe que, no interior do triângulo OA'B', existem três triângulos iguais e três paralelogramos também iguais:



O método que descrevemos permite criar uma figura semelhante à figura dada. Podemos dizer que a figura maior é uma ***ampliação*** da menor, mas também que a figura menor é uma ***redução*** da maior. O que importa é que as duas figuras são ***semelhantes***. Para relacionar seus tamanhos, definimos um número chamado ***razão de semelhança***, isto é, a razão entre os comprimentos correspondentes das duas figuras. Ela sempre pode ser escrita de duas formas (porque a semelhança tanto pode ser considerada uma ampliação ou uma redução) e no nosso exemplo ela é:

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{1}{3} \quad \text{ou} \quad \frac{A'B'}{AB} = 3$$

Uma outra propriedade da semelhança é que ela conserva os ângulos. No nosso exemplo, todos os ângulos do polígono A'B'C'D'E' são exatamente os mesmos do polígono ABCDE. Mais uma vez, é bom lembrar que isso vale para quaisquer ângulos.

Precisamos agora aprender a reconhecer quando dois polígonos são semelhantes. O critério geral é o seguinte:

Dois polígonos são semelhantes quando seus lados são proporcionais e seus ângulos internos respectivamente iguais.

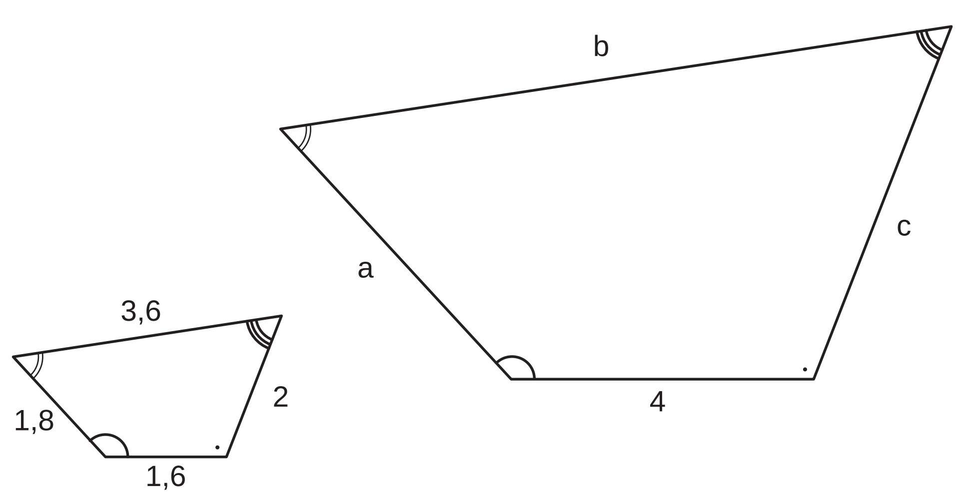
ABCD... é semelhante a A'B'C'D'...
Então

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CD}{C'D'} = \ldots = \quad \textit{razão de semelhança}$$

$$\hat{A} = \hat{A}', \hat{B} = \hat{B}', \hat{C} = \hat{C}', \hat{D} = \hat{D}' \ldots$$

EXEMPLO 1

Os dois quadriláteros desenhados abaixo são semelhantes. Quais são as medidas dos lados **a**, **b** e **c**?



Solução: Nas figuras da página anterior, os ângulos iguais estão marcados com o mesmo símbolo. Assim, se as figuras não aparecerem na mesma posição, podemos reconhecer os lados correspondentes.
Como os lados correspondentes das duas figuras são proporcionais, podemos escrever:

$$\frac{1{,}6}{4} = \frac{1{,}8}{a} = \frac{3{,}6}{b} = \frac{2}{c}$$

A primeira fração nos dá a razão de semelhança:

$$\frac{1{,}6}{4} = \frac{16}{40} = \frac{2}{5} = \text{razão de semelhança}$$

Assim, todas as outras frações são também iguais a $\frac{2}{5}$:

$$\frac{1{,}8}{a} = \frac{2}{5} \rightarrow a = \frac{1{,}8 \cdot 5}{2} = 4{,}5$$

$$\frac{3{,}6}{b} = \frac{2}{5} \rightarrow b = \frac{3{,}6 \cdot 5}{2} = 9$$

$$\frac{2}{c} = \frac{2}{5} \rightarrow c = \frac{5 \cdot 2}{2} = 5$$

Um caso especial é o da semelhança de triângulos, que já estudamos na Aula 17. Para reconhecer triângulos semelhantes, basta verificar se eles possuem os mesmos ângulos ***ou*** se seus lados são proporcionais. Por exemplo, consideremos dois triângulos: o primeiro de lados 3 cm, 4 cm e 5 cm e o segundo de lados 27 cm, 36 cm e 45 cm. Serão esses triângulos semelhantes?

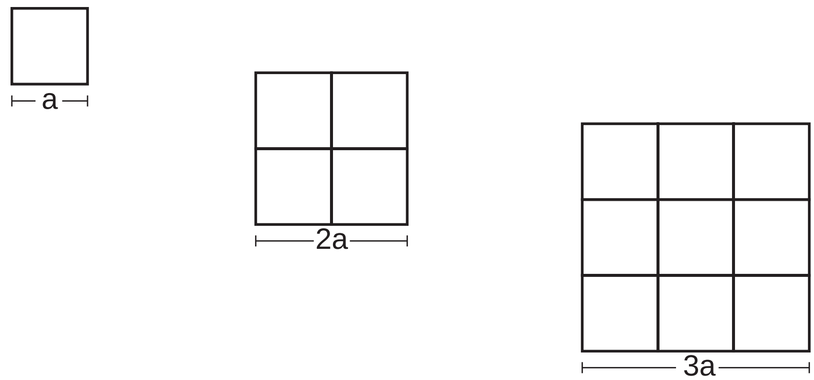
A resposta é **sim**, porque:

$$\mathbf{\frac{3}{27} = \frac{4}{36} = \frac{5}{45}}$$

Repare que as três frações são iguais porque cada uma delas é igual a $\frac{1}{9}$ (a razão de semelhança). Nós sabemos que o triângulo de lados 3 cm, 4 cm e 5 cm é retângulo porque $3^2 + 4^2 = 5^2$. Como triângulos de lados proporcionais são semelhantes e, portanto, possuem os mesmos ângulos, concluímos que o triângulo de lados 27 cm, 36 cm e 45 cm também é um triângulo retângulo.

Semelhança e áreas

Para que você perceba a relação entre as áreas de figuras semelhantes, vamos examinar o que ocorre com os quadrados. Na figura a seguir, você vê três quadrados, o primeiro com lado **a**, o segundo com lado **2a** e o terceiro com lado **3a**:



O segundo quadrado é o dobro do primeiro, mas sua área é ***quatro vezes maior***. O terceiro quadrado é o triplo do primeiro, mas sua área é ***nove vezes maior***. Assim, se o lado de um quadrado é ***cinco vezes maior*** que o de outro, conseqüentemente sua área é ***vinte e cinco vezes maior***; da mesma forma, se você aumentar o lado de um quadrado ***dez vezes***, a área fica ***cem vezes maior***.

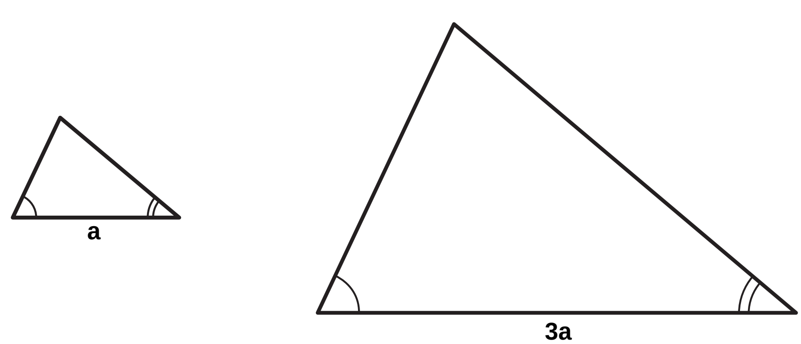
Esse fato, fácil de perceber com quadrados, é geral; isto é, ele vale para qualquer figura. Se todos os comprimentos de uma figura forem multiplicados por um número **k**, a nova figura será semelhante à primeira e sua área ficará multiplicada por $\mathbf{k^2}$. O teorema que enunciamos a seguir resume o que acabamos de observar.

Se a razão de semelhança entre duas figuras é* k*,
então a razão entre suas áreas é* $\mathbf{k^2}$*.

Acompanhe os exemplos a seguir para ver se você entendeu o que acabamos de dizer.

EXEMPLO 2

A figura abaixo mostra dois triângulos semelhantes. Se a área do menor é 8 cm^2, qual é a área do maior?



Solução: A razão de semelhança é a razão entre dois lados correspondentes, ou seja,

$$k = \frac{a}{3a} = \frac{1}{3}$$

O nosso teorema diz que:

$$\frac{\text{área do menor}}{\text{área do maior}} = k^2$$

Representando por **S** a área do triângulo maior, temos:

$$\frac{8}{S} = \left(\frac{1}{3}\right)^2$$

$$\frac{8}{S} = \frac{1}{9}$$

$$S = 8 \cdot 9 = 72$$

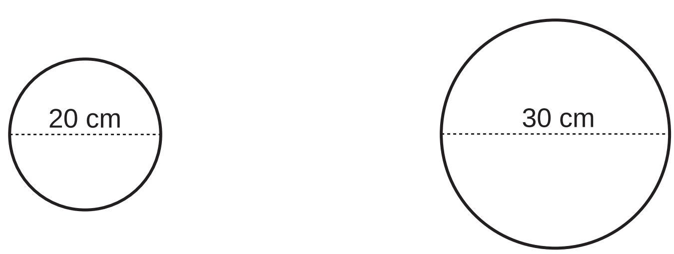
Portanto, a área do triângulo maior é **72 cm²**.

EXEMPLO 3

Em um restaurante, uma pizza com 20 cm de diâmetro custa R$ 3,60. Quanto você espera pagar por uma outra, do mesmo sabor, com 30 cm de diâmetro?

Este é um caso comum. Nos cardápios de muitos restaurantes existem pizzas de diferentes tamanhos com preços também diferentes. Vamos mostrar na solução deste exemplo, como decidir o tamanho que sai mais em conta, ou seja, como comer mais por um preço menor.

Solução: As duas pizzas são figuras semelhantes.



O valor que pagamos deve ser proporcional à quantidade que comemos, ou seja, o preço de cada pizza deve ser proporcional a sua área:

$$\frac{\text{preço da pequena}}{\text{preço da grande}} = \frac{\text{área da pequena}}{\text{área da grande}}$$

Temos então um problema que envolve a razão entre áreas de figuras semelhantes. Vamos resolvê-lo com o auxílio do nosso teorema:

$$\text{razão de semelhança: } k = \frac{20}{30} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{\text{área da pequena}}{\text{área da grande}} = K^2 = \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{4}{9}$$

Podemos calcular o preço da pizza maior. Representando esse preço por **p**, temos:

$$\frac{3,60}{p} = \frac{4}{9}$$

Daí,
$$p = \frac{3,60 \cdot 9}{4} = 8,1$$

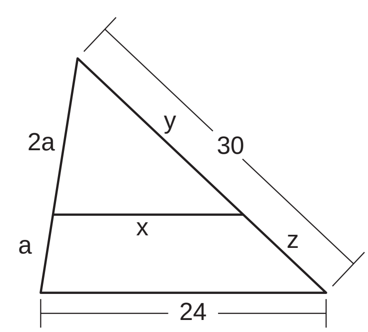
Concluímos então que o preço correto da pizza maior é **R$ 8,10**.

Você pode achar o preço da pizza maior muito alto. Afinal, o diâmetro só aumentou de 20 cm para 30 cm. O que ocorre, na realidade, é que a área da pizza maior é mais que o dobro da área da pizza menor. O preço que calculamos é o correto do ponto de vista do consumidor. Imagine agora que a pizza pequena custa R$ 3,60 e a grande R$ 7,00. O que concluímos? A pizza grande sai mais em conta. Se estamos em grupo e vamos dividir várias pizzas, sai mais barato, nesse caso, pedir todas do tamanho maior.

Exercícios

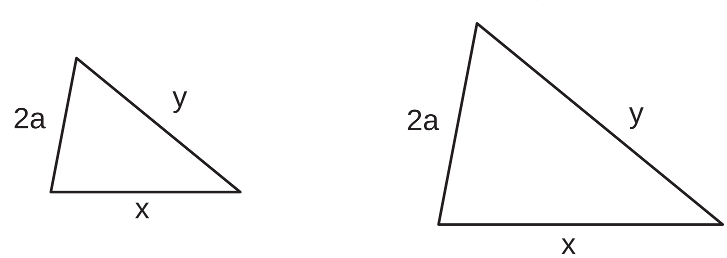
Exercício 1

O triângulo abaixo foi dividido em duas partes por meio de uma reta paralela a sua base.



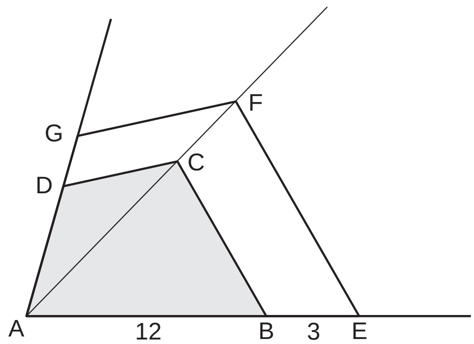
a) Calcule os segmentos x, y e z.
b) Sabendo que a área do triângulo grande é igual a 252, calcule a área do triângulo menor e a área do trapézio.

Sugestão: Observe que os dois triângulos abaixo são semelhantes. Determine a razão de semelhança e, para o item **b**, aplique o teorema da razão das áreas.



Exercício 2

ABCD é um jardim de 80 m². Ele foi ampliado, e agora tem a forma AEFG semelhante à anterior. Se AB = 12 m e BE = 3 m, calcule a área do novo jardim.



Sugestão: Determine a razão de semelhança das duas figuras e aplique o teorema da razão das áreas.

Exercício 3

Dois triângulos T_1 e T_2 são semelhantes. O primeiro tem lados 8 cm, 9 cm e 13 cm e o segundo tem perímetro igual a 360 cm.

a) Calcule os lados de T_2;

b) Quantas vezes a área de T_2 é maior que a área de T_1?

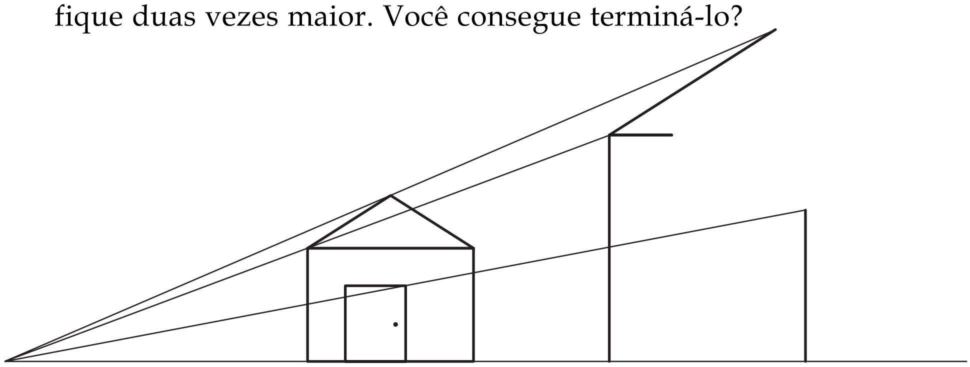
Sugestão: A razão de semelhança é igual à razão entre os lados, mas é também igual à razão entre os perímetros.

Exercício 4

Para fazer o piso de uma sala gastamos 1.500 tacos. Se todas as medidas dessa sala forem multiplicadas por 1,6 teremos uma outra semelhante. Quantos tacos serão necessários para fazer o piso da sala maior?

Exercício 5

Na figura abaixo, iniciamos a ampliação de um desenho de forma que ele fique duas vezes maior. Você consegue terminá-lo?



Exercício 6

O colar abaixo é feito com cinco discos de mesma espessura. São dois pequenos com raio R, dois médios com raio 2R e um grande com raio 3R. Se um dos discos pequenos pesa 5 gramas, qual é o peso de todo o colar?