AULA

24

A equação do 2º grau

Introdução

Freqüentemente, ao equacionarmos um problema, obtemos uma equação na qual a incógnita aparece elevada ao quadrado. Estas são as chamadas equações do 2º grau.

Veja alguns exemplos:

$$x^2 - 6 = 0$$
$$2x^2 = 10x$$
$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Repare que em todas aparece o termo $\mathbf{x^2}$.
De forma geral, a equação do 2º grau é escrita assim:

$$\boxed{\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}}$$

onde **a**, **b**, e **c** são números quaisquer. Mas, o número **a** não pode ser zero, porque, nesse caso, o termo $\mathbf{x^2}$ seria eliminado.

O número **a** é o ***coeficiente*** de x^2.

O número **b** é o ***coeficiente*** de x.

O número **c** é o ***termo independente***.

Observe os valores de **a**, **b** e **c** nos exemplos:

- Na equação $\mathbf{x^2 - 6 = 0}$ temos $\mathbf{a = 1}$, $\mathbf{b = 0}$ e $\mathbf{c = -6}$
- A equação $\mathbf{2x^2 = 10x}$ é a mesma que $\mathbf{2x^2 - 10x = 0}$; portanto, $\mathbf{a = 2}$, $\mathbf{b = -10}$ e $\mathbf{c = 0}$.
- Na equação $\mathbf{x^2 - 5x + 6 = 0}$ temos $\mathbf{a = 1}$, $\mathbf{b = -5}$ e $\mathbf{c = 6}$.

Nossa aula

Nesta aula, vamos aprender a resolver equações do 2º grau, ou seja, a encontrar suas ***soluções*** ou ***raízes***.

Uma ***raiz*** (ou solução) de uma equação é um número que, se colocado no lugar de **x**, torna a igualdade correta.

Por exemplo, consideremos a equação

$$\mathbf{x^2 - 5x + 6 = 0}$$

O que acontece se substituirmos a letra **x** pelo número 1?

Vejamos:

$$\begin{aligned} 1^2 - 5 \cdot 1 + 6 &= 0 \\ 1 - 5 + 6 &= 0 \\ 2 &= 0 \rightarrow \textbf{errado} \end{aligned}$$

Com essa experiência, descobrimos que x = 1 **não** é uma solução dessa equação. Veja agora o que acontece se substituirmos a letra **x** pelo número 2.

$$\begin{aligned} 2^2 - 5 \cdot 2 + 6 &= 0 \\ 4 - 10 + 6 &= 0 \\ 0 &= 0 \rightarrow \textbf{certo} \end{aligned}$$

Sabemos agora que x = 2 **é** uma solução (ou raiz) dessa equação.

É natural que agora você tenha perguntas a fazer, tais como:

- "Será que existem outras soluções?"
- "Como encontrá-las?"

As respostas virão com o estudo desta aula. Você descobrirá que uma equação do 2º grau possui, no máximo, duas soluções, e vai também aprender a encontrá-las.

Leia com atenção os exemplos e procure fazer os exercícios propostos.

Resolvendo $ax^2 + b = 0$

EXEMPLO 1

Vamos resolver $\mathbf{x^2 - 9 = 0}$

Solução: Transpondo - 9 para o outro lado, obtemos

$$x^2 = 9$$

ou

$$x = \pm\sqrt{9}$$

ou, ainda,

$$x = \pm 3$$

Temos, então, que a equação $\mathbf{x^2 - 9 = 0}$ possui duas raízes: $\mathbf{x = 3}$ e $\mathbf{x = -3}$.

Nota: Nem sempre as soluções de uma equação desse tipo são números inteiros. Veja a equação

$$\mathbf{x^2 - 10 = 0}$$

Fazendo da mesma forma, temos:

$$x^2 = 10 \text{ e}$$
$$x = \pm\sqrt{10}$$

Isso significa que essa equação tem também duas soluções:

$$x = \sqrt{10} \quad \text{e} \quad x = -\sqrt{10}$$

Se você quiser saber, aproximadamente, quanto valem esses números, use sua máquina de calcular. Com aproximações até a 3ª casa decimal, as raízes da equação $x^2 - 10 = 0$ são: $\mathbf{x = 3{,}162}$ e $\mathbf{x = 3{,}162}$.

Exercício 1

Resolva as equações:

a) $x^2 - 36 = 0$

b $x^2 - 3 = 0$

c) $2x^2 - 8 = 0$

EXEMPLO 2

Resolver a equação $\mathbf{4x^2 - 3 = 0}$.

Solução: Para resolver, passamos - 3 para o outro lado e em seguida dividimos os dois lados por 4. Observe:

$$4x^2 = 3$$
$$\frac{4x^2}{4} = \frac{3}{4}$$
$$x^2 = \frac{3}{4}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{3}{4}}$$

Lembre-se de que a raiz quadrada de uma fração é igual à raiz quadrada do numerador dividida pela raiz quadrada do denominador, ou seja:

$$x = \pm\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4}} = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$

A equação tem, portanto, as soluções: $x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Exercício 2

Resolva as equações:

a) $3x^2 = 9$

b) $2x^2 - 10 = 0$

c) $16x^2 - 5 = 4$

EXEMPLO 3

Vamos resolver $\mathbf{(x - 3)^2 = 16}$.
Iniciamos extraindo a raiz quadrada dos dois lados:

$$x - 3 = \pm\sqrt{16} \text{ ou}$$
$$x - 3 = \pm 4$$

Passando o **- 3** para o outro lado, temos:

$$x = 4 + 3$$

ou seja, as raízes da nossa equação são

$$x = +4 + 3 = 7 \text{ e}$$
$$x = -4 + 3 = -1$$

EXEMPLO 4

Resolver a equação $\mathbf{(x - 4)^2 = 5}$.
Solução: Procedendo da mesma forma, temos:

$$x - 4 = \pm\sqrt{5} \text{ e}$$
$$x = 4 \pm \sqrt{5}$$

ou seja, as raízes são $x = 4 + \sqrt{5}$ e $x = 4 - \sqrt{5}$

Nota: No caso que acabamos de ver, as raízes são números chamados ***irracionais***, ou seja, são números que só podem ser conhecidos por aproximações. A máquina de calcular nos mostra essas aproximações.

Para calcular $x = 4 + \sqrt{5}$, digite

$\boxed{4}\ \boxed{+}\ \boxed{5}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}\ \rightarrow\ \boxed{6{,}236}$

Para calcular $x = 4 - \sqrt{5}$, digite

$\boxed{4}\ \boxed{-}\ \boxed{5}\ \boxed{\sqrt{\ }}\ \boxed{=}\ \rightarrow\ \boxed{1{,}764}$

Exercício 3

Resolva as equações abaixo. Caso encontre raízes irracionais, use sua calculadora para obter aproximações até a 3ª casa decimal.

a) $(x + 1)^2 = 4$
b) $(x - 2)^2 = 15$
c) $(x + 5)^2 - 3 = 0$

Para resolver o caso geral **(x^2 + px = q)**, devemos aprender a criar um quadrado perfeito a partir da expressão **x^2 + px**. A partir de agora, devemos ter em mente as conhecidas fórmulas:

$$\mathbf{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2,}$$
$$\mathbf{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^{22}}$$

EXEMPLO 5

Resolver a equação **$x^2 + 6x = 7$**

Solução: Observe atentamente nossa solução. Vamos começar com algo que, a princípio, pode parecer misterioso.

Somamos 9 aos dois lados da equação.

$$x^2 + 6x + 9 = 7 + 9$$

Repare que, com esse artifício misterioso, o lado esquerdo é exatamente igual a $(x + 3)^2$. Confira.

Temos, então:

$$(x + 3)^2 = 16$$

E essa é uma equação que sabemos resolver.

$$x + 3 = \pm\sqrt{16}$$
$$x + 3 = 4$$
$$x + 3 = -4$$

As raízes são, portanto,

$$\mathbf{x = 4 - 3 = 1} \quad \text{e}$$

$$\mathbf{x = -4 - 3 = -7}$$

Fica então a pergunta: como adivinhamos que, se somássemos 9 aos dois lados da equação, a solução apareceria? Respondemos logo.
Para obter um quadrado perfeito a partir da expressão x^2 + px, devemos somar a essa expressão

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2$$

Observe que

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right) = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2$$

Portanto, se temos, por exemplo a expressão **x^2 + 6x**, para obter um quadrado perfeito, devemos somar

$$\left(\frac{6}{2}\right)^2 \mathbf{= 3^2 = 9}$$

Pratique, no exercício, como completar quadrados.

Exercício 4

Complete as expressões abaixo:

a) $x^2 + 10x + \square = (x + \square)^{22}$

solução: $\frac{10}{2} = 5$ e $5^2 = 25$. Portanto,

$$\mathbf{x^2 + 10x + 25 = (x + 5)^{22}}$$

b) $x^2 + 12x + \square = (x + \square)^{22}$
c) $x^2 - 6x + \square = (x - \square)^{22}$
d) $x^2 + 3x + \square = (x + \square)^{22}$

Estamos agora preparados para resolver o caso geral da equação do 2º grau.

EXEMPLO 6

Resolva a equação $\mathbf{x^2 - 8x + 10 = 0}$.
Solução: Observe os passos que vamos seguir; todos são conhecidos.

$$x^2 - 8x + 10 = 0$$
$$x^2 - 8x = -10$$
$$x^2 - 8x + 16 = -10 + 16$$
$$(x - 4)^2 = 6$$
$$x - 4 = \pm\sqrt{6}$$
$$x = 4 \pm \sqrt{6}$$

As raízes são $x = 4 + \sqrt{6}$ e $x = 4 - \sqrt{6}$

Aprendemos hoje a resolver equações do 2º grau. Na próxima aula vamos deduzir uma fórmula que resolve essas equações, e que você poderá utilizar sempre que quiser. Em seguida, apresentaremos os problemas que são resolvidos com auxílio das equações do 2º grau.

Exercícios finais

Exercício 5

Resolva as equações:
a) $(x - 2)^2 = 12$
b) $(x + 3)^2 = 25$

Exercício 6

A equação $(x - 1)^2 + 3 = 0$ não possui solução. Por quê?

Exercício 7

Resolva as equações:
a) $x^2 - 6x - 40 = 0$
b) $x^2 - 5x + 6 = 0$
c) $x^2 - 4x = 0$