

# A fórmula da equação do 2º grau

## Introdução

Nesta aula vamos encontrar uma fórmula para resolver a equação do 2º grau.

$$ax^2 + bx + c = 0 \text{ (com } a \neq 0)$$

Você poderá naturalmente perguntar por que será necessária tal fórmula, já que conseguimos, na aula anterior, resolver equações sem usar fórmulas. Diremos então que a fórmula torna a resolução mais rápida e permite o uso mais eficiente da máquina de calcular para obter as raízes da equação. Ainda observando a fórmula, vamos descobrir quando uma equação do 2º grau possui soluções ou não.

## Nossa aula

Inicialmente, vamos resolver uma equação do 2º grau para recordar o método que desenvolvemos na aula passada. Observe cuidadosamente todos os passos porque eles serão os mesmos que utilizaremos no caso geral.

### Resolução da equação $3x^2 + 5x + 1 = 0$

#### EXEMPLO 1

##### Solução:

**1º passo:** Como o coeficiente de  $x$  é 3, dividimos todos os termos da equação por 3.

$$x^2 + \frac{5}{3}x + \frac{1}{3} = 0$$

**2º passo:** Passamos o termo independente para o outro lado.

$$x^2 + \frac{5}{3}x = -\frac{1}{3}$$

**3º passo:** Agora, vamos acrescentar aos dois lados da equação um número capaz de transformar o lado esquerdo em um quadrado perfeito. Para fazer isso, pegamos a metade do coeficiente de  $x$ :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{5}{6}$$

e elevamos ao quadrado:  $\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{36}$

Temos, então,  $x^2 + \frac{5}{3}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \left(\frac{5}{6}\right)^2$

ou, ainda,  $x^2 + 2 \cdot \frac{5}{6}x + \left(\frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{1}{3} + \frac{25}{36}$

Observe agora que o lado esquerdo é um quadrado perfeito e que podemos reunir as duas frações do lado direito igualando seus denominadores.

$$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = -\frac{12}{36} + \frac{25}{36}$$

$$\left(x + \frac{5}{6}\right)^2 = \frac{13}{36}$$

**4º passo:** Extraímos a raiz quadrada dos dois lados.

$$x + \frac{5}{6} = \pm \frac{\sqrt{13}}{6}$$

**5º passo:** Deixamos a letra  $x$  isolada do lado esquerdo para obter as duas soluções.

$$x = -\frac{5}{6} \pm \frac{\sqrt{13}}{6} \text{ ou}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

### O caso geral: a solução da equação $ax^2 + bx + c = 0$

Desejamos agora que você acompanhe a dedução da fórmula, observando que os passos são exatamente os mesmos.

**1º passo:** Como o coeficiente de  $x$  é  $a$ , dividimos todos os termos da equação por  $a$ .

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$$

**2º passo:** Passamos o termo independente para o outro lado.

$$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$

**3º passo:** Para transformar o lado esquerdo em um quadrado perfeito, pegamos a metade do coeficiente de  $x$ :

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{b}{a} = \frac{b}{2a}$$

e o elevamos ao quadrado:  $\left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2}$

Depois, acrescentamos esse número aos dois lados:

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{2a}\right)^2$$

$$x^2 + 2 \cdot \frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

Observando que o lado esquerdo é agora um quadrado perfeito e que podemos reunir as duas frações do lado direito igualando seus denominadores, temos

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{c}{a} \cdot \frac{4a}{4a} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = -\frac{4ac}{4a^2} + \frac{b^2}{4a^2}$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

**4º passo:** Extraímos a raiz quadrada dos dois lados.

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

**5º passo:** Deixamos  $x$  isolado do lado esquerdo.

$$x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \text{ ou}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

E aí está nossa fórmula.

## Quando uma equação do 2º grau possui solução?

Na fórmula que encontramos para a solução da equação do 2º grau, vemos que, dentro da raiz quadrada, existe o número  $\mathbf{b^2 - 4ac}$ . Esse número é, em geral, representado pela letra grega  $\Delta$  (delta) e chama-se **discriminante**. Usando essa nova letra, temos que as raízes da equação  $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$  são:

$$x = -\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x = -\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

onde  $\Delta = \mathbf{b^2 - 4ac}$

Veja agora que, se o número  $\Delta$  for **positivo**, encontramos duas raízes diferentes.

Se, entretanto,  $\Delta$  for **zero**, encontramos um só valor para a raiz. Se  $\Delta$  for **negativo** a equação não terá solução.

### EXEMPLO 2

Resolver a equação  $\mathbf{2x^2 - 7x + 3 = 0}$

**Solução:** Vamos resolvê-la usando a fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Na nossa equação,  $\mathbf{a = 2}$ ,  $\mathbf{b = -7}$  e  $\mathbf{c = 3}$ . Substituindo, temos:

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3}}{2 \cdot 2}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 24}}{4}$$

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{25}}{4}$$

$$x = \frac{7 \pm 5}{4}$$

As soluções são, portanto:

$$x = \frac{7 + 5}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$$x = \frac{7 - 5}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Veja que, nesse exemplo, o **discriminante** é 25, que possui raiz quadrada exata. Mas, isso nem sempre acontece. No exemplo do início desta aula, encontramos, para raízes da equação  $3x^2 + 5x + 1 = 0$ , os valores:

$$x = \frac{-5 + \sqrt{13}}{2} \quad \text{e} \quad x = \frac{-5 - \sqrt{13}}{2}$$

Para obter valores aproximados desses números, podemos utilizar a máquina de calcular. É o que veremos a seguir.

### Usando a máquina de calcular

Consideremos, mais uma vez, a equação  $3x^2 + 5x + 1 = 0$ .

Vamos resolvê-la outra vez, usando agora a fórmula.

Temos  $a = 3$ ,  $b = 5$  e  $c = 1$ . Substituindo, temos:

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1}}{2 \cdot 3}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 - 12}}{6}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{13}}{6}$$

Rapidamente encontramos as soluções. Para obter valores aproximados dessas duas raízes, começamos calculando  $\sqrt{13}$  e guardando o resultado na memória.

Digitamos, então:

1
3
√
M+
→

VISOR  
**3,6055512**

O resultado que aparece no visor está guardado. Podemos então limpá-lo apertando a tecla

ON/C  
 Para obter a 1ª solução, digitamos.

-
5
+
MR
.
6
=
→

VISOR  
**-0,2324081**

Para obter a 2ª solução, digitamos:

-
5
-
MR
.
6
=
→

VISOR  
**-1,4342585**

Concluimos então que, com duas casas decimais, as raízes da equação  $3x^2 + 5x + 1 = 0$  são, aproximadamente,  $-0,23$  e  $-1,43$ .

Na equação  $ax^2 + bx + c = 0$ , quando encontramos  $b = 0$  ou  $c = 0$ , não há vantagem em utilizar a fórmula. Observe os exemplos seguintes.

## EXEMPLO 3

Resolva a equação  $2x^2 - 32 = 0$ .

**Solução:** Para resolver essa equação, passamos o termo independente para o outro lado e, em seguida, dividimos os dois lados por 2 (o coeficiente de  $x^2$ ).

$$2x^2 = 32$$

$$\frac{2x^2}{2} = \frac{32}{2}$$

$$x^2 = 16$$

Extraindo a raiz quadrada, temos  $x = \pm 4$ .

## EXEMPLO 4

Resolva a equação  $2x^2 - 5x = 0$ .

**Solução:** Para resolver essa equação (que possui  $c = 0$ ), o procedimento é diferente. Inicialmente colocamos a letra  $x$  em evidência:

$$x \cdot (2x - 5) = 0$$

Temos então um produto de dois números que dá zero. Isto só é possível se um desses números for zero. Como primeiro caso, podemos ter  $x = 0$ . Como segundo caso, podemos ter:

$$2x - 5 = 0$$

$$2x = 5$$

$$x = \frac{5}{2}$$

Assim, as duas raízes de  $2x^2 - 5x = 0$  são  $x = 0$  e  $x = \frac{5}{2}$ .

## Exercícios

### Exercício 1

Resolva as equações:

**a)**  $x^2 - 9 = 0$

**b)**  $x^2 + 5 = 0$

**c)**  $x^2 - 3 = 0$

### Exercício 2

Resolva as equações:

**a)**  $x^2 - 3x = 0$

**b)**  $3x^2 + 12x = 0$

### Exercício 3

Resolva as equações:

**a)**  $x^2 - 5x + 6 = 0$

**b)**  $x^2 - 3x - 10 = 0$

**c)**  $x^2 - 3x + 1 = 0$

**d)**  $x^2 - 6x + 9 = 0$

**e)**  $x^2 + 2x + 3 = 0$

### Exercício 4

Resolva as equações seguintes e use a máquina de calcular para obter valores aproximados das raízes (duas casas decimais são suficientes).

**a)**  $2x^2 + 3x - 4 = 0$

**b)**  $3x^2 - 10x + 6 = 0$