

A noção de função

Introdução

Um dos conceitos mais utilizados em Matemática é o de *função*. Ele se aplica não somente a esta área, mas também à Física, à Química e à Biologia, entre outras. Além disso, está muito presente em nosso dia-a-dia, ajudando a melhor compreender o mundo que nos cerca.

Esta aula introduz o conceito de função, que o qual trabalharemos até a Aula 32. Veja alguns exemplos da aplicação desse conceito:

- o preço de um armário é função da área que ele cobre;
- a dose de um remédio é função do peso da criança que é medicada;
- a altura de uma criança é função de sua idade;
- o desconto do Imposto de Renda é função da faixa salarial;
- o salário de um vendedor é função do volume de vendas;
- a área de um quadrado é função da medida de seus lados;
- o buraco na camada de ozônio é função do nível de poluição etc.

Nossa aula

Esses são apenas alguns exemplos. O que você precisa para entender o conceito de *função* é pensar em duas grandezas que variam, sendo que a variação de uma depende da variação da outra.

A construção de uma tabela

Para representar duas grandezas que dependem uma da outra, utilizamos uma tabela. A que segue mostra a variação do preço do armário embutido por metro quadrado.

ÁREA (m ²)	1	2	3	4	5
PREÇO (R\$)	120,00	240,00	360,00	480,00	600,00

Vemos que a área do armário é uma grandeza variável; o preço é uma grandeza variável; e a variação do preço depende da variação da área. Dizemos então que *o preço é função da área*. Para cada um dos outros exemplos, podemos construir uma tabela como a que acabamos de ver.

Vamos imaginar a bula de um remédio pediátrico que diz:

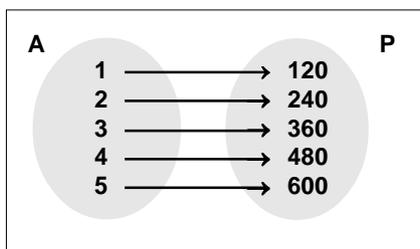
MODO DE USAR OU POSOLOGIA: 2 gotas a cada kg de peso

Pela tabela abaixo, podemos ver a variação dessa função:

PESO (kg)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
DOSE (nº de gotas)	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20

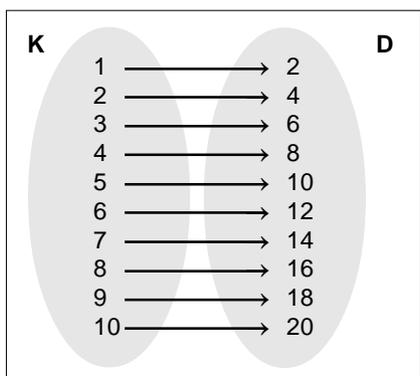
Representação por diagrama

É também muito comum representarmos a dependência entre duas grandezas que variam (variáveis) utilizando conjuntos e flechas. Observe como ficariam representadas as funções apresentadas nas duas tabelas:



O conjunto **A** é o conjunto dos números que expressam a medida da área, e o conjunto **P** é o conjunto dos preços do armário para cada área.

A cada elemento de **A**, corresponde um único elemento de **P**, ou seja, para cada área, temos um único preço.



No caso do remédio, chamaremos **K** o conjunto dos valores que expressam os pesos e **D** o conjunto do número de gotas.

Observe que, para cada peso, corresponde uma única dose do remédio. Caso contrário, continuaríamos sem saber que dose administrar e não teríamos uma função.

A leitura de uma tabela

Observe o exemplo do cálculo do Imposto de Renda deduzido na fonte (Receita Federal - 1995).

VENCIMENTOS	%
até R\$ 676,70	0%
de R\$ 676,71 a R\$ 1.319,57	15%
de R\$ 1.319,58 a R\$ 12.180,60	26,6%
acima de R\$ 12.180,60	35%

Note que o percentual de desconto depende da faixa salarial do trabalhador. Uma pessoa que ganhe até R\$ 676,70 está isenta do Imposto de Renda deduzido na fonte. Outra pessoa que ganhe R\$ 700,00 por exemplo, cai na faixa de 15% de desconto. O desconto é função da faixa salarial. Os conjuntos numéricos que se relacionam nesse exemplo são: de um lado, os valores dos salários (S), e do outro, dependendo do primeiro, o percentual de desconto (D).

Notação de uma função

Utilizamos a letra f para representar uma função. Nos exemplos que acabamos de estudar, representamos:

$f: A \rightarrow P$ PREÇO = f (área)	Função de A em P ; preço é função da área.	Função que relaciona área ao preço do armário.
$f: K \rightarrow D$ DOSE = f (peso)	Função de K em D ; dose é função do peso.	Função que relaciona o peso à dose de remédio.
$f: S \rightarrow D$ DESCONTO = f (salário)	Função de S em D ; desconto é função do salário.	Função que relaciona o salário ao desconto do IR.

Em Matemática, como você já sabe, utilizamos letras para representar grandezas variáveis. Numa função, temos sempre duas variáveis: chamamos x a variável do primeiro conjunto e y a variável que depende do valor da primeira. Assim:

$$y = f(x) \text{ significa que } y \text{ é função de } x$$

Vejamos um outro exemplo. A área do quadrado é função da medida de seu lado. Você sabe que a expressão para o cálculo da área de um quadrado é:

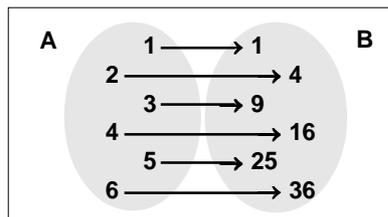
$$A = \ell^2$$

Utilizando os conceitos já estudados, temos:

- A tabela

LADO (cm)	1	2	3	4	5	6
ÁREA (cm ²)	1	4	9	16	25	36

- O diagrama



- A notação

$$f: A \rightarrow B$$

$$y = f(x) \quad \text{onde}$$

A é o conjunto das medidas do lado

B é o conjunto das medidas das áreas

y é a área

x é a medida do lado

A fórmula matemática que associa y e x é:

$$y = x^2$$

Domínio e imagem

No exemplo anterior, o conjunto A dos números que expressam a medida do lado é chamado *domínio* e o conjunto B dos números que expressam a área do quadrado é chamado *imagem*.

Vamos pensar nas seguintes questões:

- Nos outros exemplos que vimos, quais eram o *domínio* e a *imagem*?
- Qual é a lei que associa as variáveis daquelas funções?
- É possível representar essas leis matematicamente?

Veja como podemos responder a todas essas questões:

$$f : A \rightarrow P \quad \text{Domínio} = A \quad \text{Imagem} = P$$
$$y = f(x) = x \cdot 120,00$$

$$f : K \rightarrow D \quad \text{Domínio} = K \quad \text{Imagem} = D$$
$$y = f(x) = 2x$$

$$f : S \rightarrow D \quad \text{Domínio} = S \quad \text{Imagem} = D$$

$$y = f(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \leq 676,70 \\ 15\% x, & \text{se } 676,71 \leq x \leq 1.319,57 \\ 26,6\% x, & \text{se } 1.319,58 \leq x \leq 12.180,60 \\ 35\% x, & \text{se } x \geq 12.180,61 \end{cases}$$

Mais um exemplo

Mário é um vendedor que recebe mensalmente seu salário em duas partes: uma é fixa, no valor de R\$ 150,00, e a outra é variável, sendo igual a 1% do total que ele vende no mês. Vamos chamar de x o total de vendas no mês e de y o salário de Mário. Como você já deve ter notado $y = f(x)$, ou seja, o salário do vendedor é função do total de suas vendas no mês.

Podemos, agora, calcular os valores de y (o salário) atribuindo valores para x (o total de vendas) e construir uma tabela para essa função:

TOTAL DE VENDAS x	1% DE x	SALÁRIO y
3.000,00	30,00	150,00 + 30,00 = 180,00
5.000,00	50,00	150,00 + 50,00 = 200,00
10.000,00	100,00	150,00 + 100,00 = 250,00
50.000,00	500,00	150,00 + 500,00 = 650,00
80.000,00	800,00	150,00 + 800,00 = 950,00

Sabendo que o menor valor do total de vendas de um funcionário é de R\$ 3.000,00 e o maior valor já conseguido é R\$ 80.000,00, o *domínio* dessa função é o conjunto de valores de R\$ 3.000,00 a R\$ 80.000,00.

$$\text{DOMÍNIO: } R\$ 3.000,00 \leq x \leq R\$ 80.000,00$$

Nesse exemplo, como podemos observar na tabela anterior os valores de y variam de R\$ 180,00 a R\$ 950,00:

$$\text{IMAGEM: } R\$ 180,00 \leq y \leq R\$ 950,00$$

A lei matemática que associa y e x pode ser escrita assim:

$$y = 150,00 + 1\% x \text{ ou}$$

$$y = 150,00 + 0,01 x$$

Observe que, utilizando essa lei, podemos calcular y para qualquer valor de x que esteja no domínio:

$$f(3.000,00) = 150,00 + 30,00 = 180,00$$

$$f(3.550,00) = 150,00 + 35,50 = 185,50$$

$$f(4.000,00) = 190,00$$

$$f(4.200,00) = 192,00 \text{ e assim por diante.}$$

Exercícios

Exercício 1

Responda:

- Se o lado de um quadrado mede 10 cm, qual é sua área?
- Se o lado do quadrado mede 7 cm, qual a sua área?
- A área do quadrado é função da medida do lado?
- Calcule o perímetro dos quadrados de 10 cm e 7 cm.
- O perímetro do quadrado é função da medida do lado? Por quê?
- Escreva a lei que associa a medida do lado x ao perímetro do quadrado y .

Exercício 2

Um automóvel consome 1 litro de combustível a cada 8 km.

a) Complete a tabela abaixo:

D: DISTÂNCIA (km)	8	16				
C: CONSUMO (ℓ)	1	2				

- O consumo é função da distância percorrida?
- Escreva uma lei que associe a distância x ao consumo de combustível y .
- Represente esta função usando conjuntos e flechas.

Exercício 3

Uma função tem domínio $D = \{4, 7, 9\}$ e associa a cada elemento do domínio o dobro do valor dele. Qual é a imagem dessa função?

Exercício 4

A tabela abaixo representa as distâncias percorridas por um ciclista numa velocidade de 20 km/h:

A: TEMPO	30 min	1 h	1 h 30 min	2 h
B: DISTÂNCIA	10 km	20 km	30 km	40 km

- Qual o domínio?
- Qual a imagem?

Exercício 5

Considere o conjunto $A = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ e uma função $f: A \rightarrow B$ definida por $y = x + 1$. Determine:

- O domínio de f .
- A representação de f por diagrama.
- $f(-1) =$ $f(0) =$ $f(1) =$
 $f(2) =$ $f(3) =$
- A imagem de f .