AULA

28

O gráfico de uma função

Introdução

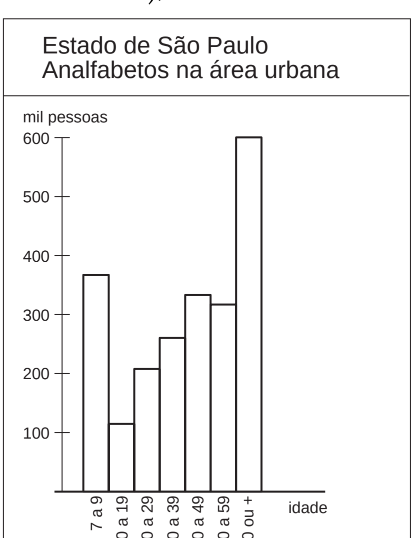
Freqüentemente você se depara com tabelas e gráficos, em jornais, revistas e empresas que tentam transmitir de forma simples fatos do dia-a-dia. Fala-se em elevação e queda da Bolsa de Valores, de lucros de empresas, de inflação, e apresenta-se um gráfico. Fala-se também em máximos e mínimos, variação lenta, variação rápida. Tudo isso, a partir da leitura de gráficos. Quem não estiver familiarizado com essas interpretações perde muitas das informações fornecidas.

Nas Aulas 8, 9 e 12 já falamos sobre alguns desses tópicos. Portanto, é interessante que você leia novamente essas aulas, que podem ajudá-lo a compreender melhor o conteúdo desta aula. Vamos retomar o estudo de gráficos, mas agora ligado às funções, que você acabou de estudar na aula anterior. Acompanhe os exemplos a seguir.

Nossa aula

EXEMPLO 1

Observe o gráfico ao lado, que foi montado a partir de dados levantados pelo IBGE. Para cada faixa etária (de 7 a 9 anos, de 10 a 19 anos, de 20 a 29 anos etc), temos uma coluna que representa o número de analfabetos naquela faixa, na região urbana de São Paulo. Assim, por exemplo, entre 10 e 19 anos, o número de analfabetos é um pouco superior a 100 mil pessoas. Temos uma função que associa a cada faixa etária o número correspondente de analfabetos.



Fonte: IBGE, PNAD. 1987

As ***variáveis*** da nossa função são: **x** = faixa etária e **y** = nº de analfabetos. Note que **y = f(x)**, ou seja, **y** é função de **x** (o nº de analfabetos depende da faixa etária).

O ***domínio*** dessa função são as faixas etárias: 7 a 9, 10 a 19, 20 a 29, 30 a 39, 40 a 49, 50 a 59 e 60 anos ou mais. Esse conjunto (domínio) possui, então, 7 elementos.

A ***imagem*** da nossa função é fomada pelas quantidades de analfabetos encontrados em cada faixa.

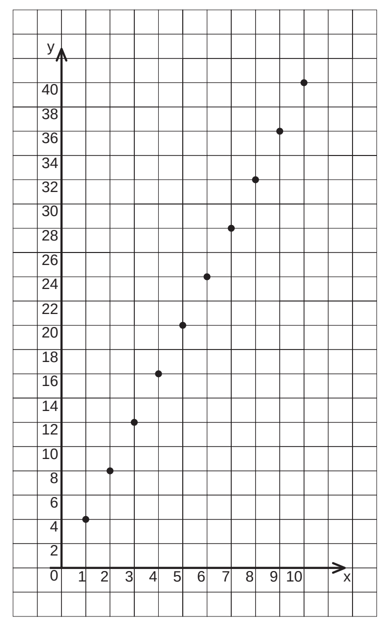
EXEMPLO 2

Num exercício da aula anterior, você viu que o perímetro de um quadrado é função da medida do lado do quadrado. A equação que associa o perímetro **y** à medida do lado **x** é:

$$\boxed{\mathbf{y = 4x}}$$

Vamos considerar quadrados com lados medindo números inteiros variando de 1 cm a 10 cm e construir uma tabela e o gráfico desta função.
Para isso, vamos usar um papel quadriculado para representar o plano cartesiano (ver Aula 8). No eixo horizontal, também conhecido como eixo **x** ou ***eixo das abscissas***, vamos marcar os valores de **x** (medida do lado) que constam na tabela. No eixo vertical, também conhecido como eixo **y** ou ***eixo das ordenadas***, vamos marcar os valores de **y** (valor do perímetro) para cada valor de **x**.

x	**y = 4x**
1	**4**
2	**8**
3	**12**
4	**16**
5	**20**
6	**24**



Este é o gráfico da função **f de A em B** definida pela equação **y = 4x**. Neste caso, estamos considerando:

Domínio = A { 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}

e, assim a imagem é:

Imagem = B { 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, 36, 40}

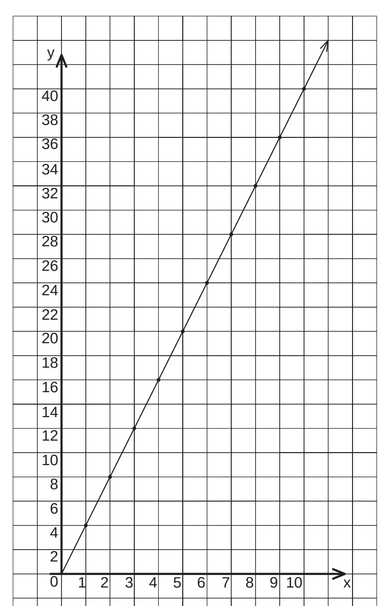
Isso significa que calculamos apenas o perímetro dos quadrados cuja medida do lado é um número natural entre 1 e 10.
No entanto, você sabe que podemos construir quadrados com outras medidas, como por exemplo: 0,5 cm; 7,8 cm; $\sqrt{2}$; etc.
A única restrição é para quadrados com lado menor ou igual a zero. Dessa forma, ampliamos o domínio da nossa função para:

D = conjunto dos números reais positivos.

E, nesse caso, é fácil concluir que a imagem dessa função é também o conjunto dos números reais positivos.

I = conjunto dos números reais positivos.

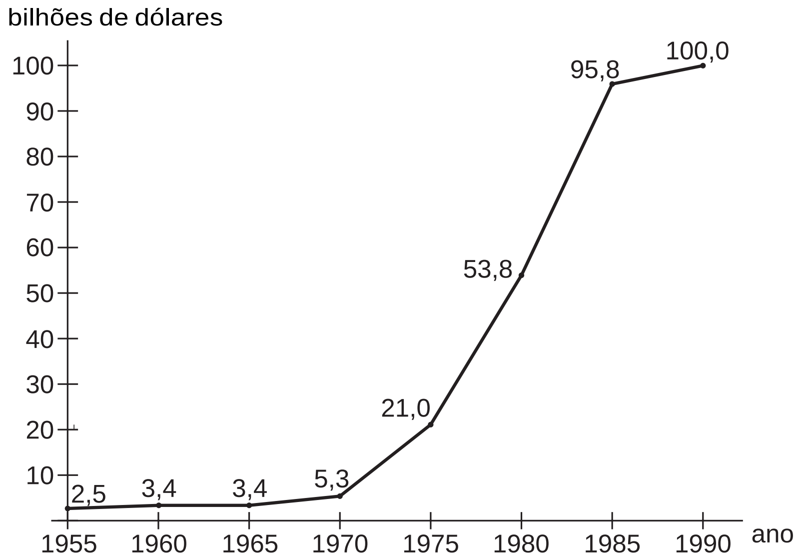
O gráfico fica como a figura ao lado: em vez de pontos isolados, temos uma semi-reta.



EXEMPLO 3

Observe agora o gráfico da dívida externa brasileira. Esta função relaciona a dívida com os anos.

Assinalamos no gráfico as informações que temos a cada cinco anos.



Os pontos foram ligados por segmentos de reta que representam a continuidade da função a cada cinco anos.

Não temos dados para saber se a evolução se deu desse modo, mas o fato de unirmos pontos isolados de um gráfico auxilia a visualização e a análise da função.

Observando atentamente esse gráfico, podemos concluir que:

- A dívida externa cresceu menos entre 1955 e 1960 e manteve-se constante no qüinqüênio seguinte.
- A dívida cresceu mais na década de 1970 e nos cinco anos seguintes, sendo a maior taxa verificada entre 1980 e 1985.

Mas o que é ***taxa de crescimento***?

Em Matemática, ***taxa*** é a medida de uma variação. Numa função, você já sabe, temos duas variáveis. Para calcular a taxa de variação, verificamos como **y** varia em função de **x**.

No nosso exemplo, para um mesmo período de tempo, a maior taxa de crescimento ocorre onde o **y** cresce mais rapidamente.

Veja, na próxima página, o cálculo da taxa de crescimento entre dois pontos de um gráfico. Isso é feito dividindo-se a diferença dos valores de **y** pela diferença dos valores de **x**.

de 1955 a 1960 : $\frac{3,4-2,5}{1960-1955}=\frac{0,9}{5}=0,18$

de 1960 a 1965 : $\frac{3,4-3,4}{1965-1960}=\frac{0}{5}=0$

de 1965 a 1970 : $\frac{5,3-3,4}{1970-1965}=\frac{1,9}{5}=0,38$

de 1970 a 1975 : $\frac{21,0-5,3}{1975-1970}=\frac{15,7}{5}=3,14$

de 1975 a 1980 : $\frac{53,8-21}{1980-1975}=\frac{32,8}{5}=6,56$

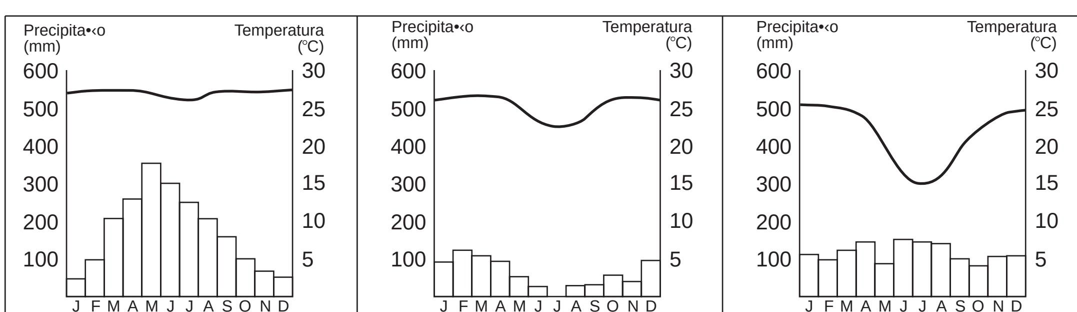
de 1980 a 1985 : $\frac{95,8-53,8}{1985-1980}=\frac{42,0}{5}=8,4$

de 1985 a 1990 : $\frac{100-95,8}{1990-1985}=\frac{4,2}{5}=0,84$

Assim, podemos comparar os crescimentos em períodos diferentes. Concluímos, até mesmo, que o crescimento ***mais rápido*** da dívida externa brasileira se deu entre 1980 e 1985. Nesse período, o crescimento foi, em média, de 8,4 bilhões de dólares por ano.

No gráfico, com o auxílio de uma régua, você pode observar que o segmento que está mais inclinado, ou seja, o que faz um ângulo maior em relação ao eixo horizontal é o que tem maior taxa de crescimento.

EXEMPLO 4



Zona da Mata Nordestina	Sert‹o baiano	Regi‹o Sul

Observe os três gráficos acima. Eles mostram duas funções no mesmo plano cartesiano: a precipitação de chuvas no primeiro eixo vertical e a temperatura no segundo eixo vertical, ambas durante todos os meses do ano. O gráfico das chuvas está representado por barras e o da temperatura, por uma linha contínua.

Você deve estar se perguntando por que foram utilizadas formas diferentes de representação. A resposta está na própria maneira das variáveis dessas duas funções se relacionarem. A quantidade de chuva é medida durante certo período de tempo e a temperatura pode ser medida a cada instante. Assim, para cada mês (**x**) temos ***um*** índice pluviométrico (**y**).
Esses gráficos (***climogramas***) são muito utilizados para explicar o clima de uma região e seu potencial agrícola, por exemplo. É fácil observar que, dessas três regiões, a que possui maior variação de temperatura é a região Sul e a que possui maior variação de precipitação é a Zona da Mata nordestina.

Podemos também falar das noções de máximo e mínimo de uma função. Nas representações gráficas da precipitação, vemos que o máximo, ou seja, o maior índice pluviométrico, ocorre em meses diferentes para cada região:

REGIÃO	PRECIPITAÇÃO MÁXIMA
ZONA DA MATA	MAIO
SERTÃO BAIANO	FEVEREIRO
REGIÃO SUL	JUNHO

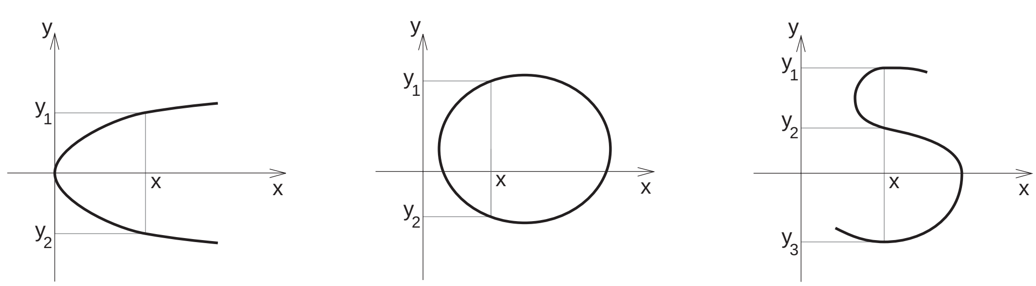
Vamos exemplificar agora os pontos mínimos através do gráfico da temperatura:

REGIÃO	TEMPERATURA MÍNIMA
ZONA DA MATA	JUNHO
SERTÃO BAIANO	JULHO
REGIÃO SUL	JUNHO

Com esses exemplos, você já deve estar bem mais seguro para ler e interpretar gráficos. Assim, pode compreender melhor as funções que aparecem no nosso dia-a-dia.

Para você saber mais

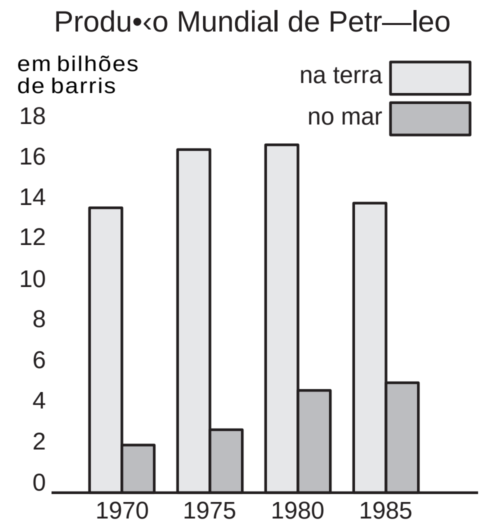
Na Aula 27 você aprendeu que, para qualquer função, é necessário que a cada valor **x** do ***domínio*** corresponda ***apenas um*** valor de **y**, que fará parte do conjunto ***imagem***. Observe os gráficos abaixo. Eles não são gráficos de funções, pois, para um mesmo valor de **x**, encontramos mais de um valor para **y**.



Exercícios

Exercício 1

O gráfico de barras ao lado mostra a produção mundial de petróleo extraído na terra e no mar. Observando este gráfico, responda:



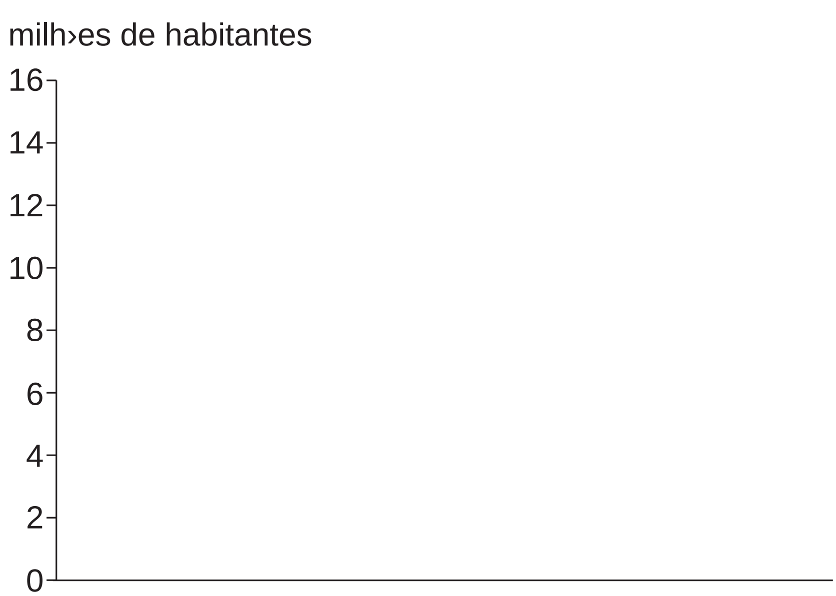
a) A produção é maior na terra ou no mar?
b) Qual delas tem crescido mais?
c) Qual é o domínio da função?
d) Qual o valor máximo da produção na terra, aproximadamente?
e) Em que ano a produção no mar foi maior?

Exercício 2

Elabore um gráfico de barras, utilizando os dados da tabela abaixo.

ÁREAS METROPOLITANAS

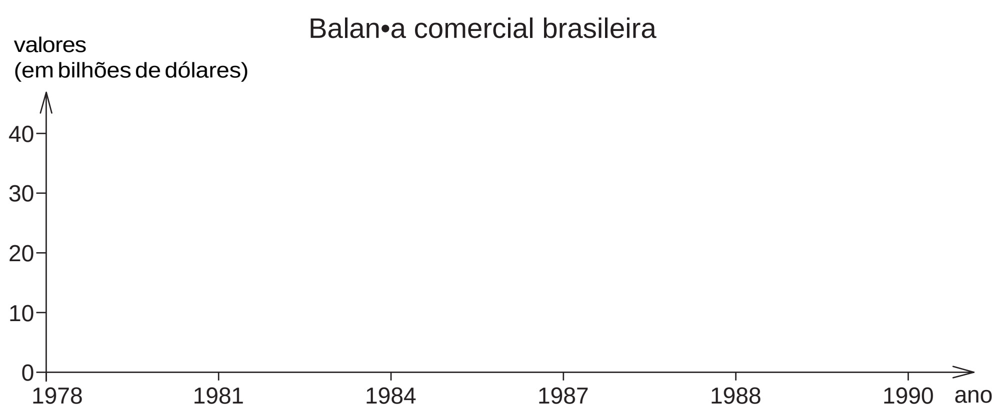
REGIÃO METROPOLITANA	POPULAÇÃO
GRANDE BELÉM	1.334.460
GRANDE FORTALEZA	2.294.524
GRANDE RECIFE	2.859.469
GRANDE SALVADOR	2.472.131
GRANDE BELO HORIZONTE	3.461.905
GRANDE RIO DE JANEIRO	9.600.528
GRANDE SÃO PAULO	15.199.423
GRANDE CURITIBA	1.975.624
GRANDE PORTO ALEGRE	3.015.960



Exercício 3

a) Elabore um gráfico que represente a balança comercial brasileira, utilizando os dados fornecidos pela tabela a seguir.

BALANÇA COMERCIAL BRASILEIRA		
ANO	IMPORTAÇÕES (BILHÕES DE DÓLARES)	EXPORTAÇÕES (BILHÕES DE DÓLARES)
1978	15	12,6
1981	24	23,2
1984	15,2	27
1987	16,5	26,2
1988	16	33,8
1990	20,4	31,4



b) Quantas funções estão representadas nesse gráfico? Quais são elas?

c) Calcule as taxas de crescimento das importações para cada um dos períodos. Qual a maior taxa? Qual a menor?

d) Calcule as taxas de crescimento das exportações para cada um dos períodos. Qual a maior taxa? Qual a menor?

e) Sabendo que a balança comercial é calculada pela diferença entre importações (I) e exportações (E), construa a tabela e o gráfico da função B = I - E.

Exercício 4

Para **x** variando no intervalo de 1 a 8 ($1 \leq x \leq 8$), faça um gráfico da função:

$$y = \frac{4}{x}$$

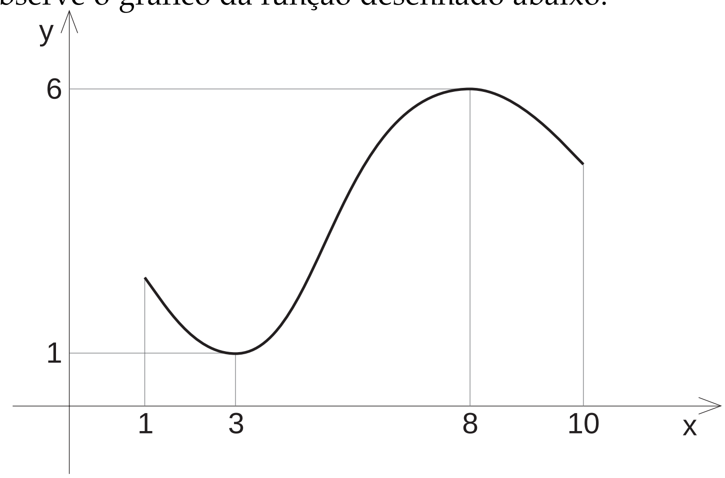
Sugestão: Organize uma tabela com alguns valores de **x** no intervalo dado. Calcule os valores correspondentes de **y**, assinale esses pontos e desenhe uma curva passando por eles.

Exercício 5

Use sua máquina de calcular para construir o gráfico da função $y = \sqrt{x}$ para $0 \le x \le 9$.

Exercício 6

Observe o gráfico da função desenhado abaixo:



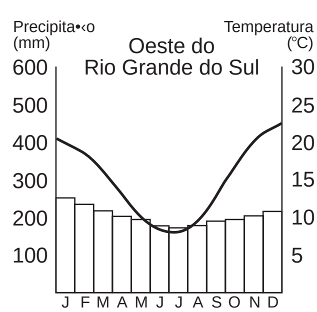
Domínio: $1 \le x \le 10$

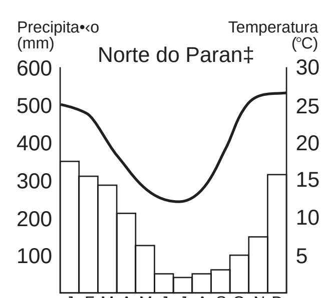
Imagem: 1£ y £ 6

a) O valor mínimo da função ocorre para x = ...
b) O valor máximo da função ocorre para x = ...
c) O valor mínimo da função é y = ...
d) O valor máximo da função é y = ...
e) A função é crescente no intervalo ..... ≤ x ≤ .....
f) A função é decrescente nos intervalos .... ≤ x ≤ .... e ..... ≤ x ≤ ..... .

Exercício 7

Observe os climogramas abaixo:





a) Qual o valor mínimo da temperatura no oeste do Rio Grande do Sul e em que mês ocorre?
b) E no norte do Paraná?
c) Qual das regiões possui um índice pluviométrico mais estável?
d) Em que meses ocorre uma maior variação na precipitação de chuvas no norte do Paraná?
e) Qual o mês mais quente nas duas regiões?