AULA

41

Triângulos especiais

Introdução

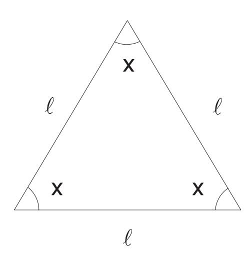
Nesta aula, estudaremos o caso de dois triângulos muito especiais – ***o equilátero e o retângulo*** – seus lados, seus ângulos e suas razões trigonométricas.

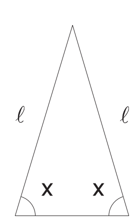
Antes, vamos relembrar alguns pontos importantes.

- A soma dos ângulos de um triângulo qualquer é sempre 180º

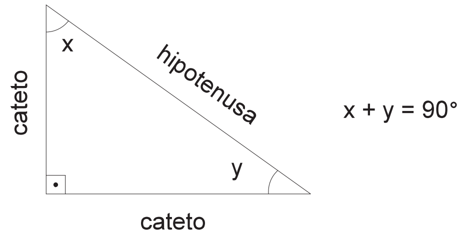
- O ***triângulo equilátero*** possui todos os lados e iguais. Por isso, cada um de seus ângulos mede 60º.

- O ***triângulo isósceles*** possui dois lados iguais e dois ângulos iguais.





- Um ***triângulo retângulo*** possui um ângulo reto e dois ângulos agudos e complementares. Os lados de um triângulo retângulo chamam-se ***catetos*** e ***hipotenusa***. Os catetos são sempre perpendiculares e formam um ângulo reto.

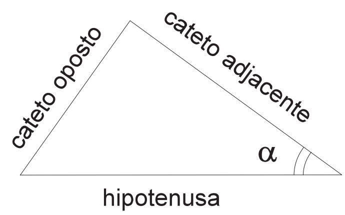


- Na aula anterior, nós estudamos as razões trigonométricas dos triângulos retângulos, que são:

$$\text{sen } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

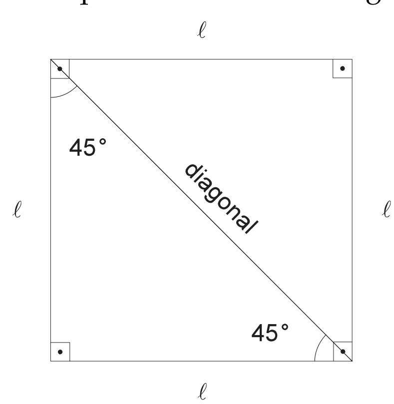


Nesta aula, esses conceitos serão aplicados em casos especiais de triângulos que aparecem com freqüência em nosso dia-a-dia.

Nossa aula

A diagonal do quadrado

Uma figura geométrica muito simples e bastante utilizada é o quadrado. Traçando um segmento de reta unindo dois vértices não-consecutivos do quadrado – uma diagonal – dividimos o quadrado em dois triângulos retângulos isósceles.



Em qualquer um desses triângulos, dois lados são iguais aos lados do quadrado, a hipotenusa é igual à diagonal do quadrado, e os dois ângulos agudos são iguais a 45º. Sabendo que os dois catetos medem ℓ podemos calcular o comprimento **d** da hipotenusa usando o Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = \ell^2 + \ell^2$$
$$d^2 = 2\ell^2$$
$$d = \sqrt{2\ell^2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{d = \ell\sqrt{2}}$$

Assim, para qualquer quadrado de lado ***l***, calculamos facilmente o comprimento da diagonal multiplicando ℓ por $\sqrt{2}$.

EXEMPLO 1

Num quadrado de 4 cm de lado qual a medida da diagonal **d**?

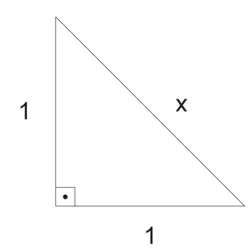
Solução

$d = \ell\sqrt{2} = 4\sqrt{2}\text{cm}$

Este raciocínio pode ser aplicado sempre que encontrarmos um triângulo retângulo isósceles.

EXEMPLO 2

No triângulo da ilustração, quanto mede a hipotenusa?



Solução:

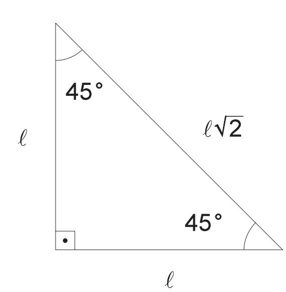
$x = 1\sqrt{2} = \sqrt{2}$

Razões trigonométricas do ângulo de 45º

Veremos agora como determinar, a partir do triângulo, as razões trigonométricas de um ângulo de 45º.

Num triângulo retângulo, se um dos ângulos mede 45º, o outro ângulo agudo também mede 45º, pois são ângulos complementares. Podemos então concluir que temos um ***triângulo retângulo isósceles***.

Observe que para qualquer um dos ângulos de 45º que escolhermos, o cateto oposto é igual ao cateto adjacente. Usando as fórmulas que revimos na introdução, vamos obter os valores abaixo. Acompanhe:



$$\text{sen } 45^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 45^\circ = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\ell}{\ell\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{tg } 45^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjaccente}} = \frac{\ell}{\ell} = 1$$

Na tabela trigonométrica os valores de sen, cos e tg de 45º são:

sen 45º = 0,70711
cos 45º = 0,70711
tg 45º = 1,00000

Considerando $\sqrt{2}$ = 1,41421, nas fórmulas, você confirmará estes valores. Observe que racionalizamos os denominadores das frações $\frac{1}{\sqrt{2}}$, ou seja, multiplicamos o denominador e o numerador da fração por $\sqrt{2}$ e encontramos $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Fazemos isso por ser muito mais simples dividir 1,41421 por 2 do que dividir 1 por 1,41421; mas nos dois casos o resultado seria 0,70711.

A altura de um triângulo equilátero

Em qualquer triângulo podemos sempre traçar três alturas. Num triângulo equilátero, já que os três lados são iguais, bem como os três ângulos (cada um mede 60º), as três alturas terão a mesma medida. No triângulo equilátero da ilustração do meio, traçamos uma delas (relativa à base):

O bserve que, num triângulo equilátero qualquer, a altura é também ***mediana*** (divide o lado oposto em duas partes iguais) e ***bissetriz*** (divide o ângulo do vértice em dois ângulos iguais), conforme se vê nas figuras.

Observe também que a altura divide o triângulo equilátero em dois triângulos retângulos com as mesmas medidas de ângulos e lados.

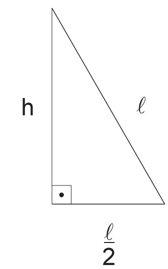
Usando o Teorema de Pitágoras podemos calcular a medida da altura h em função do lado ℓ:

$$h^2 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \ell^2$$

$$h^2 = \ell^2 - \frac{\ell^2}{4}$$

$$h^2 = \frac{4\ell^2 - \ell^2}{4} = \frac{3\ell^2}{4}$$

$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2}$$



Assim, conhecendo a medida do lado de um triângulo equilátero, você pode calcular sua altura pela fórmula que acabamos de encontrar. No entanto você pode sempre refazer nosso raciocínio, aplicando o Teorema de Pitágoras, tal como acabamos de fazer; é sempre uma ótima solução.

Observação importante

Se o triângulo não for equilátero, mas sim retângulo, com ângulos agudos medindo 30º e 60º, um dos catetos será sempre a metade da hipotenusa, e o outro é a altura de um triângulo equilátero, cujo lado será igual à hipotenusa (faça uma figura para verificar isso!).

EXEMPLO 3

Calcule a altura de um triângulo equilátero de lado 6 cm.

Solução:

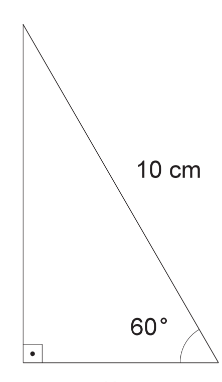
$$h = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$$

EXEMPLO 4

Num triângulo retângulo, um dos ângulos agudos mede 60º e a hipotenusa mede 10 cm. Calcule a medida do cateto adjacente ao ângulo dado.

Solução:

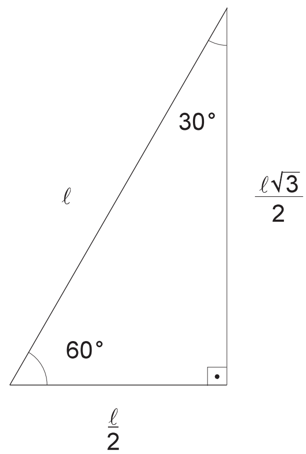
O triângulo descrito no problema pode ser representado como na figura. Pelas relações que acabamos de observar, o cateto adjacente ao ângulo de 60º é igual à metade da hipotenusa, e a resposta será x = 5 cm.



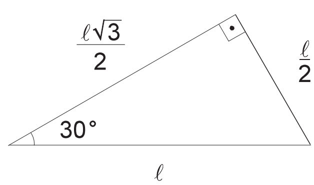
Razões trigonométricas dos ângulos de 30º e 60º

Podemos agora utilizar as razões trigonométricas para expressar as relações entre ângulos e lados de um triângulo retângulo com ângulos agudos de 30º e 60º.

Já vimos que, num triângulo desse tipo (veja a figura), se a hipotenusa mede ℓ, os catetos medem $\frac{\ell}{2}$ e $\ell\frac{\sqrt{3}}{2}$.



Considerando primeiramente o ângulo de 30º, teremos:



$$\text{sen}\,30° = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{\ell} = \frac{1}{2}$$

$$\cos 30° = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\ell\frac{\sqrt{3}}{2}}{\ell} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{tg}\,30° = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\ell\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Procedendo da mesma forma para o ângulo de 60º , encontramos:

$$\text{sen}\,60° = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\ell\frac{\sqrt{3}}{2}}{1} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\ell} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos 60° = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{\frac{\ell}{2}}{\ell} = \frac{\ell}{2} \cdot \frac{1}{\ell} = \frac{1}{2}$$

$$\text{tg}\,60° = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjaccente}} = \frac{\ell\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\ell}{2}} = \frac{\ell\sqrt{3}}{2} \times \frac{2}{\ell} = \sqrt{3}$$

No exercício 5, da Aula 40, você verificou que, se dois ângulos são complementares, o seno de um é igual ao co-seno do outro.

Nesta aula, confirmamos esse fato, mais uma vez, para os ângulos de 30º e 60º.

$$\text{sen } 30^\circ = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

$$\text{sen } 60^\circ = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Usando a tabela trigonométrica, você encontra:

ÂNGULO	SENO	CO-SENO	TANGENTE
30º	0,50000	0,86603	0,57735
60º	0,86603	0,50000	1,73205

Considerando então $\sqrt{3}$ » 1,73205, você pode confirmar os valores.

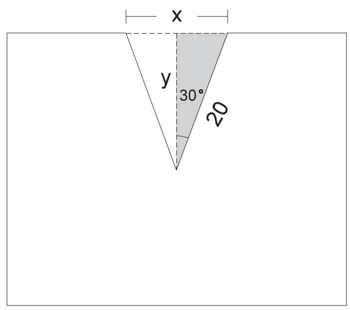
Resumindo:

ÂNGULO	SENO	CO-SENO	TANGENTE
30º	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
45º	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
60º	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Um exemplo na indústria

Um bloco de aço deve receber uma fenda como se vê no projeto (vista frontal). Observe que as medidas podem ser suficientes para descrever a peça, mas não são as medidas necessárias para quem fará o corte. Essa pessoa precisará mesmo é da largura do corte e sua profundidade. Só assim poderá marcar na peça os pontos de corte.

Primeiro, vejamos o que se pode concluir sobre a largura **x** do corte. O triângulo cortado é isósceles (dois lados medindo 20), contém um ângulo de 60º (fig. 1). Como os outros dois ângulos devem ser iguais (porque o triângulo é isósceles) então cada um vai medir:



$$\frac{180^\circ - 60^\circ}{2} = 60^\circ$$

Assim, descobrimos que, na verdade, trata-se de um triângulo equilátero, e a largura só pode ser 20:

largura = 20

Agora corte esse triângulo equilátero em dois triângulos retângulos para descobrir a medida da profundidade **y** do corte. Você pode observar na figura acima que essa medida é igual à altura do triângulo equilátero. Como já sabemos que essa altura é $\ell \frac{\sqrt{3}}{2}$, basta substituir o valor de ℓ, que é 20, e obter:

$$\text{Profundidade} = \frac{20\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3} \approx 17,32$$

Outro exemplo prático

Uma pessoa com problemas no joelho foi ao ortopedista. O médico recomendou fisioterapia diária, que consistia em sentar-se numa cadeira alta e elevar a perna até o ângulo de 60º com um peso no pé.

Como a pessoa não podia ir diariamente ao fisioterapeuta decidiu fazer o exercício em casa. Sua dúvida é: como marcar a elevação de 60º?

Vamos desenhar um triângulo retângulo com ângulos agudos de 30º e 60º, de modo que a hipotenusa do triângulos seja do tamanho da perna da pessoa.

Sabemos que a altura **x** é a metade do comprimento da perna porque:

$$\cos 60^\circ = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}} = \frac{x}{\text{perna}} = \frac{1}{2}$$

Como $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$, temos $\frac{x}{\text{perna}} = \frac{1}{2}$. Logo, **x** é metade da perna.

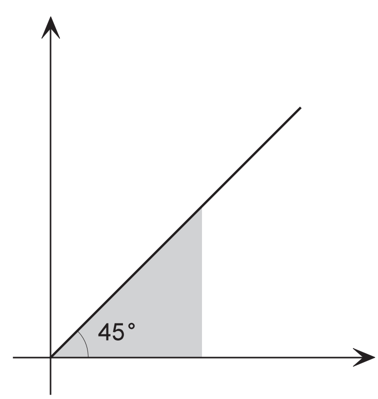
Veja como fica fácil marcar a altura que a perna deve ser elevada, basta medir a perna (abaixo do joelho), dividir por dois e marcar essa altura na parede, por exemplo.

Uma aplicação em gráficos

Observe os gráficos da figura. Nesse gráfico estão representadas as três retas que ilustram o desempenho de três empresas num certo setor pesquisado. Podemos comparar esses desempenhos apenas visualmente ou com maior precisão, dependendo dos objetivos da análise.

É fácil concluir que o melhor desempenho foi o da empresa A, e o pior, o da empresa C: basta uma comparação visual dos gráficos. No entanto, poderemos fazer um estudo mais preciso das diferenças de crescimento, se descobrirmos os ângulos que cada uma dessas retas faz com o eixo horizontal.

Usando os conhecimentos desta aula e observando que o gráfico da empresa B passa sempre pela diagonal dos quadradinhos, podemos dizer que temos um ângulo de 45º.

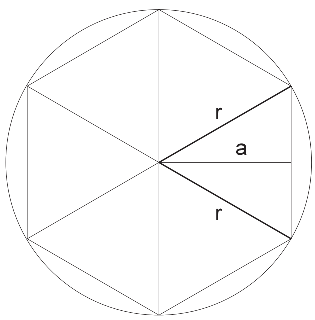


Com o auxílio de uma régua também podemos descobrir os ângulos formados pelas outras duas retas.

Confirme no gráfico original as medidas obtidas nas figuras. Como vê, um dos catetos é a metade da hipotenusa e podemos marcar, então, os ângulos. No primeiro caso (da empresa A), o ângulo formado com o eixo horizontal é de 60º, já que $\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$. No segundo caso (da empresa C), o ângulo formado com o eixo horizontal é de 30º, pois $\text{sen}\ 30^\circ = \frac{1}{2}$.

Exercício 1

Nos projetos ilustrados, quanto medem o ângulo α e a altura **h**?



Exercício 2

Num hexágono regular (lados e ângulos iguais), o segmento **a** da figura chama-se ***apótema*** e o segmento **r** é o raio da circunferência circunscrita. Sabendo-se que um hexágono regular é formado por 6 triângulos equiláteros, obtenha **a** e **r** em função do lado ℓ do hexágono.

Exercício 3

No exercício 6 da aula 40 verificamos que $\text{tg}\, x = \dfrac{\text{sen}\, x}{\cos x}$. Obtenha tg 30º, tg 45º e tg 60º, usando essa relação.

Exercício 4

Determine a medida do lado de um quadrado cuja diagonal é:

a) $4\sqrt{2}$

b) 2 cm

Exercício 5

Uma parede foi azulejada, como mostra a figura. Calcule a altura aproximada da parede, sabendo que cada azulejo é um quadrado de 15 cm de lado e que, na vertical, cabem 13 azulejos inteiros, enfileirados.