AULA

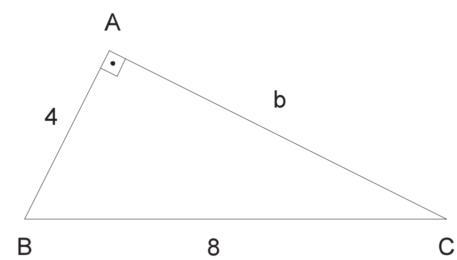
42

A lei dos co-senos

Introdução

Utilizando as razões trigonométricas nos triângulos retângulos, podemos resolver vários problemas envolvendo ângulos e lados. Esse tipo de problema é conhecido como resolução de triângulos. Conhecendo dois elementos de um triângulo retângulo, quase sempre podemos determinar os outros elementos, como veremos nos exemplos a seguir:

Conhecendo dois lados, e usando o Teorema de Pitágoras, determinamos a medida do terceiro lado:



$$b^2 = 8^2 - 4^2$$

$$b = \sqrt{64 - 16} = \sqrt{48}$$

$$b = 4\sqrt{3} \cong 6{,}92$$

Usando as razões trigonométricas e consultando a tabela trigonométrica, determinamos os ângulos agudos.

$$\cos \hat{B} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} \Rightarrow \hat{B} = 60^\circ$$

$$\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = 30^\circ$$

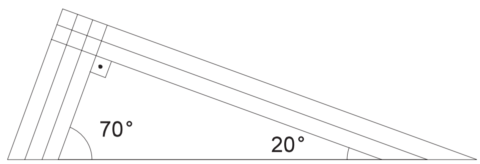
Se conhecermos um lado e um ângulo, poderemos determinar os outros dois lados:

$$\text{sen } 50^\circ = \frac{6}{a} \Rightarrow a = \frac{6}{\text{sen } 50^\circ} = \frac{6}{0,766} \cong 7,83$$

$$\text{tg } 50^\circ = \frac{6}{c} \Rightarrow c = \frac{6}{\text{tg } 50^\circ} = \frac{6}{1,192} \cong 5,03$$

Sabendo que os ângulos agudos são complementares, determinamos o outro ângulo: $\hat{C} = 90^\circ - \hat{B} \Rightarrow \hat{C} = 40^\circ$

Conhecendo os dois ângulos agudos, podemos construir vários triângulos semelhantes (com os mesmos ângulos). Portanto, essa é a única situação indeterminada na resolução de triângulos retângulos.



A hipotenusa unitária

Vimos nas aulas anteriores que as razões trigonométricas de um ângulo agudo não dependem do triângulo retângulo escolhido. Na figura abaixo temos:

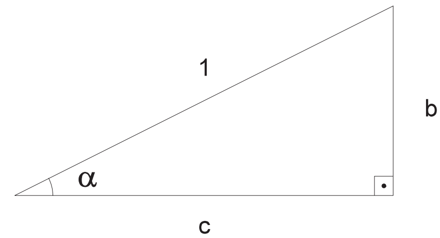
$$\text{sen } \alpha = \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\cos \alpha = \frac{c_1}{a_1} = \frac{c_2}{a_2} = \frac{c_3}{a_3} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

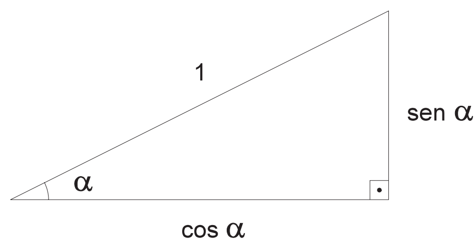
Observamos que, para o cálculo do seno e do co-seno de um ângulo, dividimos um dos catetos pela hipotenusa do triângulo retângulo correspondente. Já que podemos obter esse valor com qualquer um dos triângulos semelhantes, é muito prático trabalharmos com um triângulo retângulo cuja hipotenusa seja igual a 1.

$$\text{sen}\, a = \frac{b}{1} = b$$

$$\cos a = \frac{c}{1} = c$$

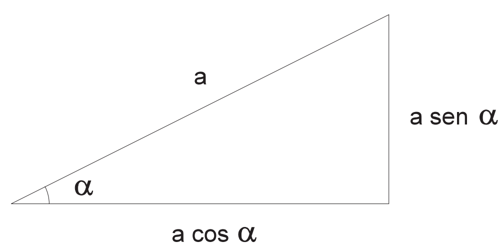


Apenas nesse caso, em que a hipotenusa do triângulo retângulo é igual a 1, podemos obter a medida dos catetos conhecendo seus ângulos agudos.



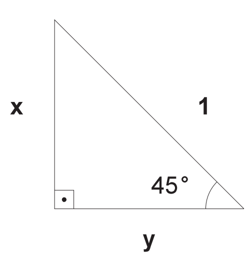
Observação

Para uma hipotenusa qualquer teríamos:

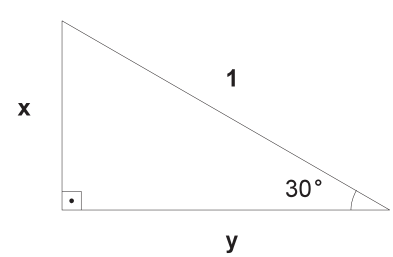


Veja, nos triângulos retângulos abaixo, a medida dos catetos:

a)



b)



$x = \text{sen } 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$y = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$x = \text{sen } 30° = \frac{1}{2}$

$y = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ @ 0,866

A variação do seno e do co-seno

Na figura a seguir, temos uma circunferência cujo raio é igual a 1 dm (um decímetro). Para vários ângulos diferentes, podemos obter os valores do seno e do co-seno (em decímetros) apenas medindo os catetos dos triângulos formados.

BP = sen AÔP   OB = cos AÔP
CQ = sen AÔQ   OC = cos AÔQ
DR = sen AÔR   OD = cos AÔR
e assim por diante...

A partir dessa figura, podemos concluir que:

I) Quanto maior o ângulo, maior a medida do cateto oposto (ou seja, maior o valor do seno).

II) Quanto maior o ângulo, menor a medida do cateto adjacente (ou seja, menor o valor do co-seno).

Senos e co-senos de ângulos obtusos

Para obtermos um ângulo α obtuso (maior que 90º), desenhamos um triângulo retângulo (semelhante aos que desenhamos para os ângulos agudos do item anterior) e, como estamos considerando a hipotenusa igual a um (1 dm), definimos que:

sen α = HM   e   cos α = OH

Note que o seno do ângulo obtuso α é igual ao seno do ângulo agudo $180^\circ - \alpha$ e que o co-seno do ângulo α é do mesmo comprimento que o co-seno de $180^\circ - \alpha$. Entretanto, como está do "outro lado" em relação ao centro do círculo, terá sinal negativo.

Resumindo:

$$\text{sen}\ \alpha = \text{sen}\ (180^\circ - \alpha)$$
$$\cos \alpha = -\cos (180^\circ - \alpha)$$

Veja alguns exemplos:

a) $30^\circ + 150^\circ = 180^\circ$

$\text{sen}\ 150^\circ = \text{sen}\ 30^\circ = \frac{1}{2}$

$\cos 150^\circ = -\cos 30^\circ = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

b) $80^\circ + 100^\circ = 180^\circ$

$\text{sen}\ 100^\circ = \text{sen}\ 80^\circ = 0{,}98481$

$\cos 100^\circ = -\cos 80^\circ = -0{,}17365$

c) $45^\circ + 135^\circ = 180^\circ$

$\text{sen}\ 135^\circ = \text{sen}\ 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos 135^\circ = -\cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Veja agora a relação entre lados e ângulos de um triângulo não-retângulo (acutângulo ou obtusângulo).

O triângulo acutângulo

No triângulo acutângulo ABC (que tem três ângulos agudos), traçamos uma de suas alturas e obtemos dois triângulos retângulos:

o triângulo ABH e o triângulo ACH.

Chamando de **x** a medida de BH, a base BC do triângulo ABC fica dividida em dois segmentos de medidas **x** e **a – x**.

Usando o Teorema de Pitágoras em cada um dos triângulos retângulos, temos:

1º triângulo: $b^2 = h^2 + (a - x)^2$
2º triângulo: $c^2 = h^2 + x^2$

Subtraindo essas duas equações:

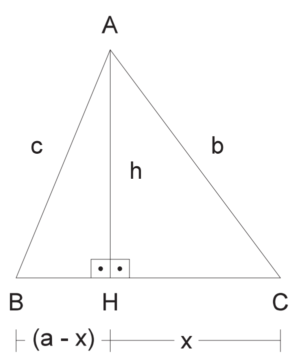
$$b^2 - c^2 = (a - x)^2 - x^2$$
$$b^2 - c^2 = a^2 - 2ax + \cancel{x^2} - \cancel{x^2}$$
$$b^2 - c^2 = a^2 - 2ax$$

Sabendo que: $\cos\hat{B} = \frac{x}{c} \Rightarrow x = c \cdot \cos\hat{B}$, efetuamos a substituição:

$$b^2 - c^2 = a^2 - 2ac\cos\hat{B}$$

Logo, $\boxed{b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\hat{B}}$

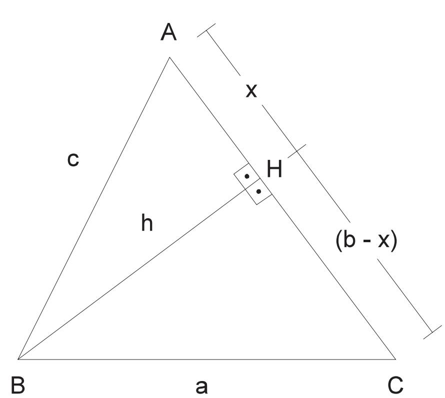
Da mesma forma, podemos achar **c**, conhecendo a medida dos dois outros lados e seu ângulo oposto. Para isso, fazemos HC medindo **x** e BH medindo **a – x**.



$$\begin{array}{rl} & c^2 = h^2 + (a - x)^2 \\ - & b^2 = h^2 + x^2 \\ \hline & c^2 - b^2 = (a - x)^2 - x^2 \\ & c^2 - b^2 = a^2 - 2ax \end{array}$$

Como **x** agora é igual a $b\cos\hat{C}$, temos: $\boxed{c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\hat{C}}$

Para obter uma expressão para o cálculo de **a**, podemos traçar outra altura **h** do triângulo ABC, relativa ao lado AC.



$$\begin{array}{rl} & a^2 = h^2 + (b - x)^2 \\ - & c^2 = h^2 + x^2 \\ \hline & a^2 - c^2 = (b - x)^2 - x^2 \\ & a^2 - c^2 = b^2 - 2bx \quad \text{e} \quad x = c \cdot \cos\hat{A} \end{array}$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}}$$

Resumindo:

Num triângulo acutângulo, valem as relações:

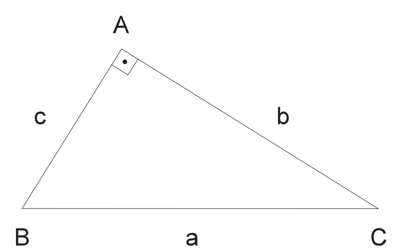
$$\boxed{\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A} \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos \hat{B} \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos \hat{C} \end{aligned}}$$

Para você saber mais

Ao transformar um triângulo retângulo num triângulo acutângulo, o ângulo reto diminui e, conseqüentemente, o lado oposto também diminui.

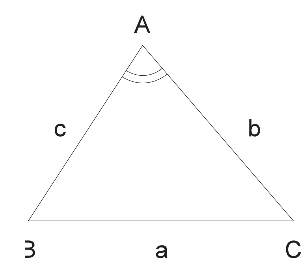
Observe as figuras:

Triângulo retângulo



$a^2 = b^2 + c^2$

Triângulo acutângulo



$a^2 < b^2 + c^2$
$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$

O triângulo obtusângulo

Veja o que ocorre quando um triângulo retângulo se transforma num triângulo obtusângulo:

$a^2 = b^2 + c^2$

$a^2 > b^2 + c^2$

Procedendo como no caso do triângulo acutângulo, descobrirmos de quanto a soma $\mathbf{b^2 + c^2}$ precisa ser acrescida para se igualar a $\mathbf{a^2}$.

A fim de facilitar a visualização, vamos girar o triângulo obtusângulo, colocando o lado AC como base:

Traçando a altura relativa ao lado AC, formamos um novo segmento AH, que mede **x** e dois triângulos retângulos: triângulo BHA e triângulo BHC.

Usando o Teorema de Pitágoras nos triângulos BHA e BHC e subtraindo as equações obtidas, temos:

$$\begin{array}{rl} & a^2 = h^2 + (b + x)^2 \\ - & \underline{c^2 = h^2 + x^2} \\ & a^2 - c^2 = (b + x)^2 - x^2 \\ & a^2 - c^2 = b^2 + 2bx \qquad \rightarrow \qquad a^2 = b^2 + c^2 + 2bx \end{array}$$

No triângulo retângulo triângulo BHA, temos $\cos(180º - \hat{A}) = \frac{x}{c}$

$$\text{logo } x = \cos(180º - \hat{A})$$

$$\cos(180º - \hat{A}) = -\cos\hat{A}$$

$$x = -c\cos\hat{A}$$

Substituindo **x** na equação:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2b(-c \cdot \cos\hat{A}) \quad \text{ou}$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\hat{A}}$$

Assim, concluímos que as expressões obtidas para triângulos acutângulos são válidas para triângulos obtusângulos.

EXEMPLO 1

Uma pessoa viajou de A para C passando por B. De A até B, percorreu 25 km e de B até C, 42 km. Os percursos AB e BC formam entre si um ângulo de 150º. Se fosse possível ir em linha reta de A para C, qual seria a economia de quilometragem?

Solução:

$x^2 = 25^2 + 42^2 - 2 \cdot 25 \cdot 42 \cdot \cos 150^\circ$

$x^2 = 625 + 1764 - 2 \cdot 1050\ (-\cos 30^\circ)$

$x^2 = 2389 + 2100 \cdot 0{,}866$

$x^2 = 2389 + 1818{,}6$

$x^2 = 4207{,}6$

x @ 65 km

Indo de A para C, passando por B, gasta-se 25 + 42 = 67 km; e de A para C em linha reta, aproximadamente, 65 km. Desse modo, a economia de quilometragem seria de 2 km.

EXEMPLO 2

Se o ângulo entre as direções AB e BC fosse menor, o caminho direto seria mais vantajoso?

Solução:

Vejamos, como exemplo, duas situações:

a) Se o ângulo for reto:

$x^2 = 25^2 + 42^2$

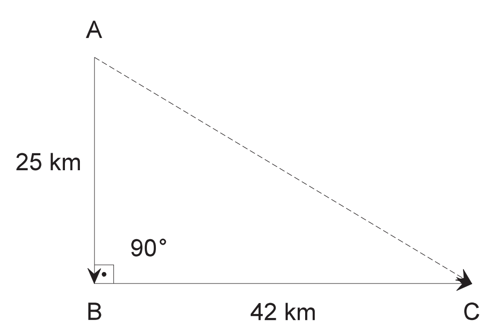
$x^2 = 625 + 1764$

$x^2 = 2389$

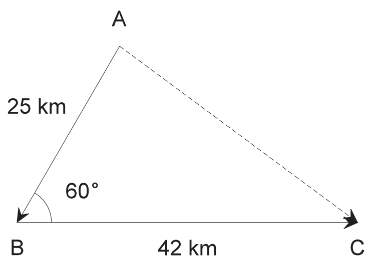
x @ 49 km

67 km – 49 km = 18 km

Seriam economizados 18 km.



b) Se o ângulo for agudo igual a 60º:



$x^2 = 25^2 + 42^2 - 2 \cdot 25 \cdot 42 \cdot \cos 60^\circ$

$x^2 = 625 + 1764 - 2 \cdot 100 \cdot \frac{1}{2}$

$x^2 = 1239$

$x \cong 35$ km

67 km – 35 km = 32 km

Seriam economizados 32 km.

Quanto menor o ângulo entre AB e BC, melhor seria ir direto de A para C, pois essas cidades seriam mais próximas e a diferença entre os dois percursos aumentaria.

Exercícios

Exercício 1

Dados os seguintes elementos de um triângulo ABC: $\hat{A} = 30^\circ$, AB = 8 m, CB = 5 m. Calcule AC.

Exercício 2

Os lados de um triângulo medem 5 cm, 7 cm e 10 cm.

a) Classifique esse triângulo quanto aos ângulos.

b) Obtenha o valor aproximado do maior ângulo do triângulo.

Exercício 3

Determine:

a) sen 120º

b) cos 120º

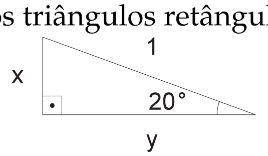
c) sen 95º

d) cos 95º

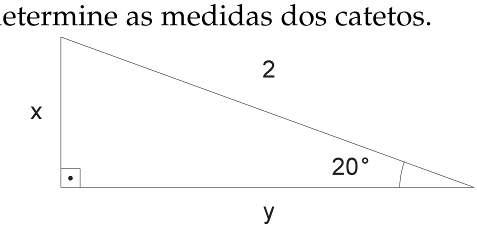
Exercício 4

Nos triângulos retângulos abaixo, determine as medidas dos catetos.

a)



b)



Exercício 5

Complete com = , > ou <.

a) sen 30º .... sen 45º

b) cos 30º .... cos 45º

c) sen 70º .... sen 110º

d) cos 70º .... cos 110º

e) sen 70º .... cos 20º

f) cos 30º .... sen 60º

g) cos 120º .... cos 150º

h) sen 130º .... sen 100º