

A lei dos senos

Introdução

Na Aula 42 vimos que a Lei dos co-senos é uma importante ferramenta matemática para o cálculo de medidas de lados e ângulos de triângulos quaisquer, isto é, de triângulos de "forma" arbitrária.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \hat{A}$$

Note que se $\hat{A} = 90^\circ$, então $\cos \hat{A} = 0$ e $a^2 = b^2 + c^2$, confirmando o Teorema de Pitágoras.

Para utilizar a lei dos co-senos no cálculo da medida de um dos lados de um triângulo, precisamos conhecer as medidas dos outros dois lados e a medida do ângulo oposto ao lado desconhecido. Nem sempre temos esses dados. O que podemos fazer quando conhecermos, por exemplo, um lado e dois ângulos? A solução para problemas desse tipo é o assunto desta aula.

Nossa aula

Calculando a área de um triângulo qualquer

Sabemos que a área de um triângulo pode ser obtida pela fórmula:

$$S = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2}$$

ou, simplesmente,

$$S = \frac{b \cdot h}{2}$$

em que **b** é a base e **h** a altura.

Percebemos, então, que é preciso saber a medida de um dos lados do triângulo e da altura relativa a esse lado, como nos exemplos a seguir:

Nos três casos temos, $S = \frac{b \cdot h}{2}$ sendo que no triângulo retângulo há a facilidade de termo $h = c$. Assim, a área é calculada multiplicando os dois catetos e dividindo o resultado por 2. Nos outros dois casos precisamos calcular h .

Para o triângulo acutângulo, conhecendo o ângulo \hat{A} , temos:

$$\boxed{\text{sen } \hat{A} = \frac{h}{c}} \quad \text{ou} \quad c \cdot \text{sen } \hat{A} = h$$

No triângulo obtusângulo, conhecendo o ângulo \hat{A} e considerando o triângulo retângulo formado pela altura, pelo prolongamento do lado a e pelo lado c , temos:

$$\boxed{\text{sen}(180^\circ - \hat{A}) = \frac{h}{c}} \quad \text{ou} \quad c \cdot \text{sen}(180^\circ - \hat{A}) = h$$

Já vimos na Aula 42, que $\text{sen}(180^\circ - \hat{A}) = \text{sen } \hat{A}$. Sabendo que o seno de um ângulo qualquer é igual ao seno do seu suplemento, concluímos que, nos dois casos, $h = c \cdot \text{sen } \hat{A}$ e substituindo h na fórmula de cálculo da área, encontramos:

$$\boxed{S = \frac{b \cdot c \text{sen} \hat{A}}{2}}$$

EXEMPLO 1

Calcule a área total da figura:

Solução:

A área do triângulo ABC é:

$$S_1 = \frac{12 \cdot 30 \cdot \text{sen}120^\circ}{2} =$$

$$= 180 \cdot \text{sen} 60^\circ =$$

$$= 180 \cdot \frac{1}{2} = 90 \text{ mm}^2$$

A área do triângulo DBC é:

$$S_2 = \frac{50 \cdot 50 \cdot \text{sen}45^\circ}{2} = 1250 \cdot \text{sen} 45^\circ \cong 1250 \cdot 0,7 = 875 \text{ mm}^2$$

Portanto, a área total da figura $S = S_1 + S_2 = 965 \text{ mm}^2$ ou $9,5 \text{ cm}^2$.

Observação:

Essa fórmula para o cálculo da área é válida para qualquer triângulo, inclusive para o triângulo retângulo.

$$S = \frac{b \cdot c \cdot \text{sen} 90^\circ}{2} \quad \text{e, como } \text{sen} 90^\circ = 1,$$

temos:

$$S = \frac{b \cdot c}{2}$$

Para obter a fórmula $S = \frac{1}{2} b \cdot c \operatorname{sen} \hat{A}$, utilizamos o seno do ângulo \hat{A} para encontrar h . Mas também poderíamos utilizar o seno do ângulo \hat{C} :

$$h = a \operatorname{sen} \hat{C} \text{ e } S = \frac{1}{2} b \cdot a \operatorname{sen} \hat{C}.$$

Como $h = c \operatorname{sen} \hat{A}$ e $h = a \operatorname{sen} \hat{C}$, temos:

$$\boxed{c \cdot \operatorname{sen} \hat{A} = a \operatorname{sen} \hat{C}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}} = \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}}}$$

Generalizando esta conclusão também para o ângulo \hat{B} e seu lado oposto b :

$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}}$$

A igualdade das razões entre cada um dos lados de um triângulo e o seno do respectivo ângulo oposto é chamada de **lei dos senos**.

O triângulo e a circunferência

No dicionário, encontramos as seguintes definições:

Inscrito → Traçado dentro.

Circunscrito → Limitado totalmente por uma linha.

Em geometria, esses termos são usados com um pouco mais de precisão. Observe os exemplos:

a) O retângulo está inscrito no losango ou o losango está circunscrito ao retângulo

(observe que todos os vértices do retângulo tocam os lados do losango).

b) A esfera está inscrita no cubo ou o cubo está circunscrito à esfera

(todas as faces do cubo tocam a esfera).

- c) O hexágono está inscrito no círculo ou o círculo está circunscrito ao hexágono

(todos os vértices do hexágono tocam o círculo).

- d) O círculo está inscrito no triângulo retângulo ou o triângulo retângulo está circunscrito ao círculo

(todos os lados do triângulo tocam o círculo).

Mais uma vez, o triângulo se confirma como uma figura especial. É sempre possível inscrever uma circunferência em um triângulo; além disso, sempre podemos circunscrever uma circunferência a um triângulo.

Para a circunferência circunscrita ao triângulo, e cujo raio é R , temos o seguinte resultado:

$$2R = \frac{a}{\operatorname{sen} \hat{A}} = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$$

Observe ainda que, no caso do triângulo retângulo, $\operatorname{sen} \hat{A} = \operatorname{sen} 90^\circ = 1$ e

$$2R = a = \frac{b}{\operatorname{sen} \hat{B}} = \frac{c}{\operatorname{sen} \hat{C}}$$

EXEMPLO 2

Calcular os outros dois lados de um triângulo que mede 5 cm de um lado e tem ângulo de 80° e outro de 40° , como mostra a figura:

Solução:

$$\frac{5}{\sin 60^\circ} = \frac{b}{\sin 80^\circ} \quad \frac{5}{0,866} = \frac{b}{0,985}$$

$$b = \frac{5 \cdot 0,985}{0,866} = 5,687$$

$$\frac{5}{\sin 60^\circ} = \frac{c}{\sin 40^\circ} \quad \frac{5}{0,866} = \frac{c}{0,643} \quad c = \frac{5 \cdot 0,643}{0,866} = 3,712$$

EXEMPLO 3

Um triângulo de lados 6, 8 e 8 está inscrito num círculo. Determine seus ângulos e o raio do círculo.

Solução:

O triângulo do problema é isósceles, como o representado na figura abaixo. Inicialmente, vamos descobrir a medida do ângulo do vértice (\hat{A}):

$$\begin{aligned} 6^2 &= 8^2 + 8^2 - 2 \cdot 8 \cdot 8 \cdot \cos \hat{A} \\ 36 &= 128 - 128 \cos \hat{A} \\ -92 &= -128 \cos \hat{A} \rightarrow \cos \hat{A} = \frac{92}{128} \approx 0,719 \end{aligned}$$

Consultando a tabela trigonométrica,
 $\hat{A} \approx 44^\circ$.

Os ângulos \hat{B} e \hat{C} da base são iguais e medem: $\hat{B} = \hat{C} \gg \frac{180^\circ - 44^\circ}{2} \gg 68^\circ$

Para determinar o raio do círculo, podemos utilizar qualquer um dos lados e o respectivo ângulo oposto. Temos, então:

$$2R = \frac{6}{\sin 44^\circ} \quad 2R = \frac{6}{0,695} @ 8,6 \quad R \cong 4,3 \quad \text{ou}$$

$$2R = \frac{8}{\sin 68^\circ} \quad 2R = \frac{8}{0,927} @ 8,6 \quad R \cong 4,3$$

Assim, os ângulos são $\hat{A} = 44^\circ$ e $\hat{B} = \hat{C} = 68^\circ$. E o raio mede, aproximadamente, 4,3.

Exercícios

Exercício 1

- a) Calcule o raio do círculo circunscrito num triângulo equilátero de lado **a**.
- b) Calcule a área do triângulo equilátero de lado **a**.

Exercício 2

Calcule a área do hexágono regular de lado **a**, formado por seis triângulos equiláteros.

Exercício 3

Para calcular a área aproximada de um terreno irregular, os agrimensores subdividem o terreno em triângulos formados a partir de um mesmo vértice no interior do terreno. Usando o teodolito, eles marcam os ângulos formados ao redor desse ponto e medem as distâncias do ponto até a fronteira do terreno.

Observe a figura e calcule a área aproximada do terreno, usando as medidas tomadas por um agrimensor:

$$OA = 52 \text{ m}$$

$$OB = 63 \text{ m}$$

$$OC = 59 \text{ m}$$

$$OD = 40 \text{ m}$$

$$OE = 45 \text{ m}$$

$$OF = 50 \text{ m}$$

$$OG = 48 \text{ m}$$

Exercício 4*

O terreno correspondente à figura ABCDE, abaixo, foi vendido a R\$ 40,00 o metro quadrado. Conseqüentemente foi vendido por:

- a) R\$ 7.800,00
- b) R\$ 5.000,00
- c) R\$ 100.000,00
- d) R\$ 7.960,00
- e) R\$ 1.150,00

* Exercício aplicado na PUC-SP.

Exercício 5*

No triângulo ABC da figura, em que R é o raio da circunferência, o ângulo \hat{A} é oposto ao lado a, que mede $\frac{3R}{2}$. Calcule o valor de $\text{sen } \hat{A}$.

* Fonte: *Matemática Aplicada – 2º grau*, Ed. Moderna, Luiz Marcio Imenes, Fernando Trotta e José Jakubovic.