AULA

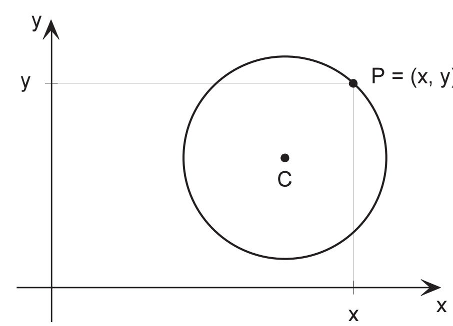
47

A equação da circunferência

Introdução

Nas duas últimas aulas você estudou a equação da reta. Nesta aula, veremos que uma circunferência desenhada no plano cartesiano também pode ser representada por uma equação.

Repare que, quando um ponto P se movimenta sobre uma circunferência de centro C, sua abcissa e sua ordenada variam.



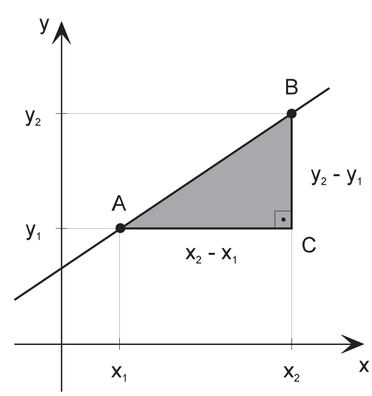
Entretanto, quando P se desloca sobre a circunferência, há uma coisa que permanece invariável: a distância de P ao centro é sempre igual ao raio.

Iniciamos esta aula recordando a aplicação do Teorema de Pitágoras para o cálculo da distância entre dois pontos.

Nossa aula

A distância entre dois pontos

Considere os pontos: $A = (x_1, y_1)$ e $B = (x_2, y_2)$ como mostra a figura a seguir. Para calcular a distância AB, formamos o triângulo retângulo ABC com um cateto horizontal e outro vertical.



Vemos que $AC = x_2 - x_1$ e que $CB = y_2 - y_1$. Pelo Teorema de Pitágoras temos:

$AB^2 = AC^2 + CB^2$
$AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_2)^2$

Fórmula da distância entre dois pontos:

$$\boxed{AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Se tivermos A = (1, 3) e B (7, – 1), por exemplo, a distância entre esses dois pontos será:

$$AB = \sqrt{(7 - 1)^2 + (-1 - 3)^2} = \sqrt{6^2 + (-4)^2} = \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52}$$

Portanto, $AB \cong 7{,}21$

A equação da circunferência

Uma circunferência é determinada quando conhecemos a posição do seu centro e o valor do seu raio. Imaginando no plano cartesiano uma circunferência de centro no ponto C = (a, b) e com raio R, vamos representar por P = (x, y) um ponto qualquer que pertence a essa circunferência. Que propriedade tem o ponto P?

Se P pertence à circunferência, sua distância até o centro é igual ao raio.

Como a distância do ponto C = (a, b) ao ponto P = (x, y) é igual a R, usando a fórmula da distância entre dois pontos temos:

$$\sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = R$$

Elevando ao quadrado os dois membros, a expressão obtida é a equação da circunferência de centro (a, b) e raio R.

Equação da circunferência:

$$\boxed{(x - a)^2 + (a - b)^2 = R^2}$$

A seguir, observe os exemplos em que construimos as equações de diversas circunferências a partir da posição do centro e do valor do raio:

CENTRO	RAIO	EQUAÇÃO
(2, 3)	4	$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 16$
(5, – 2)	6	$(x-5)^2 + (y+2)^2 = 36$
(4, 0)	$\sqrt{3}$	$(x-4)^2 + y^2 = 3$
(0, – 3)	2	$x^2 + (y+3)^2 = 4$
(0, 0)	1	$x^2 + y^2 = 1$

Vamos aprender a verificar quando um ponto pertence a uma circunferência. Por exemplo: será que o ponto (6, – 2) pertence à circunferência $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$?

Para responder a essa pergunta, basta substituir as coordenadas do ponto dado na equação da circunferência e verificar a igualdade.

No nosso caso, para $x = 6$ e $y = -2$, obtemos:

$$(6-2)^2 + (-2-1)^2 = 25$$
$$= 4^2 + (-3)^2 = 25$$
$$= 16 + 9 = 25$$

Como a igualdade se verifica, podemos dizer que o ponto (6, – 2) pertence à circunferência $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 25$.

Observe o exemplo a seguir:

EXEMPLO 1

Determine **y** para que o ponto (5, y) pertença à circunferência $(\boldsymbol{x}-2)^2 + (y-1)^2 = 25$.

Solução:

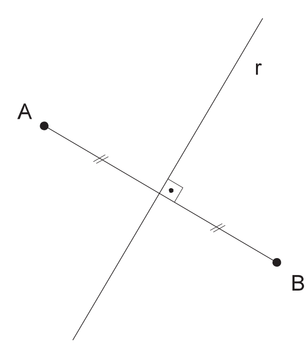
Substituindo o ponto dado na equação, calculamos o valor de **y**:

$$(5-2)^2 + (y-1)^2 = 25$$
$$3^2 + (y-1)^2 = 25$$
$$(y-1)^2 = 25-9$$
$$(y-1)^2 = 16$$
$$y-1 = \pm 4$$
$$y = 1 \pm 4 \Rightarrow \begin{cases} y = 1+4 = 5 \\ \text{ou} \\ y = 1-4 = -3 \end{cases}$$

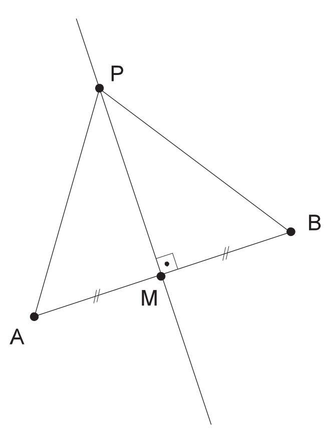
Encontrando dois pontos para **y**, temos que os pontos A = (5, 5) e B = (5, – 3) pertencem à circunferência dada. Observe que o centro da circunferência é o ponto (2, 1) e que o raio é 5.

Mediatrizes

A ***mediatriz*** de um segmento é a reta perpendicular que contém o ponto médio desse segmento. Na figura a seguir, a reta **r** é a mediatriz do segmento AB.

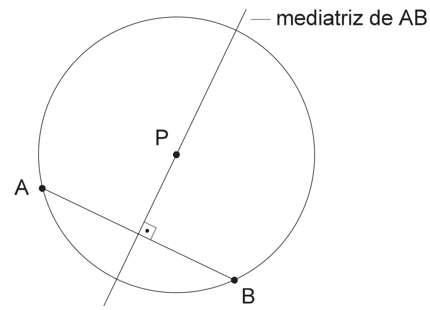


Todos os pontos de uma mediatriz possuem distâncias iguais aos extremos do segmento. Na próxima figura, veremos que o ponto P pertence à mediatriz do segmento AB. Portanto, sua distância até o ponto A é ***sempre igual*** à sua distância até o ponto B. Repare que isso ocorre porque os triângulos PMA e PMB são iguais.



PA = PB

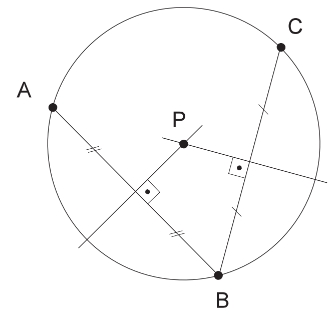
Imagine agora que os pontos A e B pertencem a uma circunferência de centro P. O que podemos concluir? Como PA e PB são raios, então PA = PB. Isso significa que o ponto P está na mediatriz do segmento AB.



Guarde a seguinte propriedade:

Se dois pontos A e B pertencem a uma circunferência a mediatriz de AB passa pelo centro.

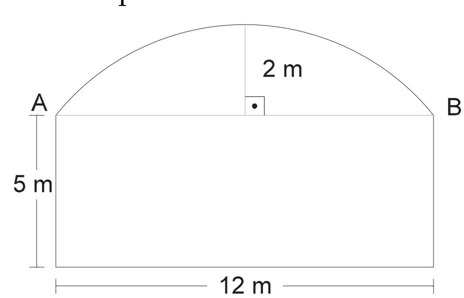
Ao aplicarmos duas vezes essa propriedade, podemos construir uma circunferência que passa por três pontos dados. Neste caso, o centro P pertence à mediatriz de AB e também à mediatriz de BC.



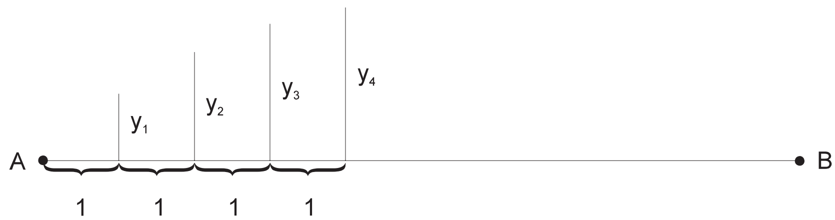
O ponto P também pertence à mediatriz de AC; mas é suficiente fazer a interseção de duas mediatrizes para determiná–lo.

Um problema de engenharia

Um galpão tem a forma da figura abaixo quando visto de frente: 12 m de largura, 5 m de altura nas laterais e 7 m de altura máxima, sendo a linha da cobertura uma circunferência perfeita.

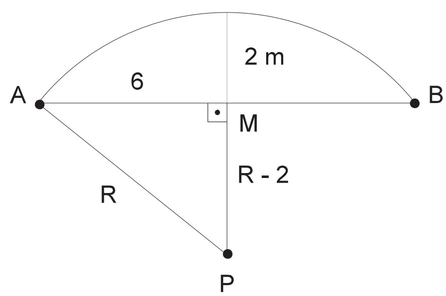


Para a construção da cobertura, o mestre de obras precisa saber a cada metro da viga AB a que altura está a cobertura. Assim, precisamos calcular com exatidão as alturas y_1, y_2, y_3 etc. que aparecem na seguinte figura:



Vamos resolver o problema.

Inicialmente, vamos determinar a posição do centro da circunferência, o qual chamaremos de P. De acordo com a próxima figura, sabemos que P pertence à mediatriz de AB, que PA é o raio e que PM é igual ao raio menos dois metros.



Como M é o ponto médio de AB temos AM = 6. Pelo Teorema de Pitágoras:

$$R^2 = (R - 2)^2 + 6^2$$

$$R^2 = R^2 - 4R + 4 + 36$$

$$4R = 40$$

$$R = 10$$

Sabemos que o raio da circunferência da cobertura é de 10 m; assim, temos que MP = 8 m. Tomamos um sistema de coordenadas de forma que o ponto A seja a origem e o eixo x coincida com AB. Dessa forma, temos B = (12, 0) e P = (6, – 8).

Assim, obtemos a equação da circunferência de centro (6, – 8) e raio 10:

$$(x - 6)^2 + (y + 8)^2 = 100$$

Nessa equação substituiremos a abcissa x pelos valores 1, 2, 3, 4 etc., calculando para cada um deles as ordenadas correspondentes. Vamos mostrar o cálculo das duas primeiras ordenadas, deixando as outras como exercício.

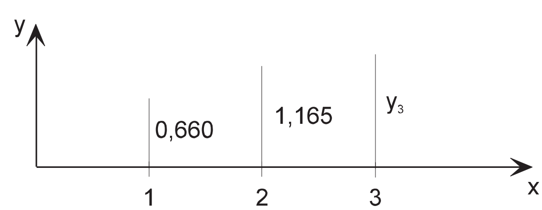
Para $x = 1$ temos:

$$
\begin{aligned}
(1-6)^2 + (4+8)^2 &= 100 \\
25 + (y+8)^2 &= 100 \\
(y+8)^2 &= 75 \\
y + 8 &= \sqrt{75} \qquad \text{(só o valor positivo interessa)} \\
y &= \sqrt{75} - 8 \cong 0{,}660 = y_1
\end{aligned}
$$

Para $y = 2$, temos:

$$
\begin{aligned}
(2-6)^2 + (y+8)^2 &= 100 \\
16 + (y+8)^2 &= 100 \\
(y+8)^2 &= 84 \\
y + 8 &= \sqrt{84} \\
y &= \sqrt{84} - 8 \cong 1{,}165 = y_2
\end{aligned}
$$

Desse modo, é possível construir uma circunferência em um lugar em que o compasso não pode ser aplicado. Usando a equação da circunferência, podemos determinar a posição exata de cada um dos seus pontos.



Exercícios

Exercício 1.

Determine a equação de cada uma das circunferências dados o centro C e o raio R.

a) $C = (5, -1)$, $R = 3$

b) $C = (-3, 2)$, $R = \sqrt{7}$

c) $C = (0, 1)$, $R = 2$

Exercício 2.

Determine o centro e o raio de cada uma das circunferências cujas equações são dadas:

a) $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 6$

b) $(x - 3)^2 + y^2 = 10$

c) $(x + 4)^2 + (y - 3)^2 = 1$

Exercício 3.

Determine a equação da circunferência com centro no ponto (3, 1) e passando pelo ponto (6, 3).
Sugestão: O raio é a distância entre o centro e qualquer um de seus pontos.

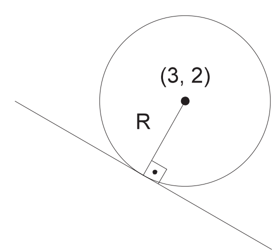
Exercício 4.

Verifique se o ponto (2, 7) pertence, é interior ou exterior à circunferência $x^2 + (y - 2)^2 = 34$.
Sugestão: Um ponto é interior a uma circunferência se a sua distância até o centro for menor que o raio. Um ponto será exterior se a sua distância até o centro for maior que o raio.

Exercício 5.

Determine a equação da circunferência com centro no ponto (3, 2) e tangente à reta $2x + y + 7 = 0$

Sugestão: De acordo com a figura, o raio da circunferência é a distância do ponto (3, 2) até a reta dada. Veja a Aula 45 para lembrar como se calcula a distância de um ponto até uma reta.



Exercício 6.

Determine a equação de uma circunferência sabendo que A = (1, 4) e B = (7, 8) são extremidades de um diâmetro.

Sugestão: Observe que dados dois pontos (x_1, y_1) e (x_2, y_2), o ponto médio do segmento determinado por eles é o ponto $\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Exercício 7.

Na circunferência $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 36$ determine o ponto de ordenada máxima.
Sugestão: Faça um desenho dessa circunferência e observe que ponto possui o maior valor de y.

Exercício 8.

Termine de resolver o "problema de engenharia" da nossa aula, calculando, as ordenadas y_3, y_4, y_5, ... , até y_{12}.

Exercício 9.

Na circunferência $(x - 2)^2 + (y - 5)^2 = 10$ determine os pontos de ordenada 6.