AULA

48

O princípio multiplicativo

Introdução

A palavra Matemática, para um adulto ou uma criança, está diretamente relacionada com atividades e técnicas para contagem do número de elementos de algum conjunto. As primeiras atividades matemáticas que vivenciamos envolvem sempre a ação de contar objetos de um conjunto, enumerando seus elementos.

As operações de adição e multiplicação são exemplos de "técnicas" matemáticas utilizadas também para a determinação de uma quantidade. A primeira (adição) reúne ou junta duas ou mais quantidades conhecidas; e a segunda (multiplicação) é normalmente aprendida como uma forma eficaz de substituir adições de parcelas iguais.

A multiplicação também é a base de um raciocínio muito importante em Matemática, chamado ***princípio multiplicativo***. O princípio multiplicativo constitui a ferramenta básica para resolver problemas de contagem sem que seja necessário enumerar seus elementos (como veremos nos exemplos).

Os problemas de contagem fazem parte da chamada ***análise combinatória***.

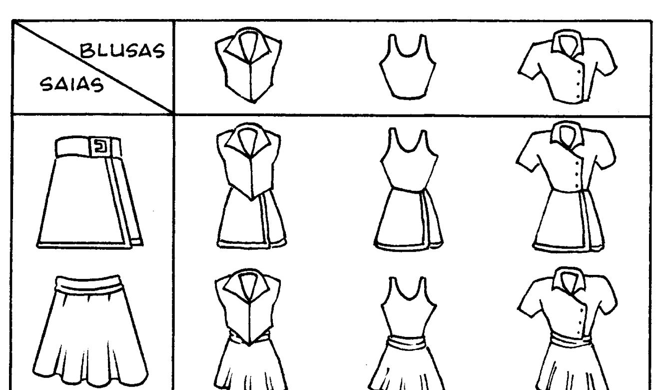
A partir desta aula, aprofundaremos o estudo dessa parte da Matemática.

Nossa aula

EXEMPLO 1

Maria vai sair com suas amigas e, para escolher a roupa que usará, separou 2 saias e 3 blusas. Vejamos de quantas maneiras ela pode se arrumar.

Solução:



O princípio multiplicativo, ilustrado nesse exemplo, também pode ser enunciado da seguinte forma:

Se uma decisão $\mathbf{d_1}$ pode ser tomada de **n** maneiras e, em seguida, outra decisão $\mathbf{d_2}$ puder ser tomada de **m** maneiras, o número total de maneiras de tornarmos as decisões $\mathbf{d_1}$ e $\mathbf{d_2}$ será $\mathbf{n \cdot m}$.

No exemplo anterior havia duas decisões a serem tomadas:

$\mathbf{d_1}$: escolher uma dentre as 3 blusas
$\mathbf{d_2}$: escolher uma dentre as 2 saias

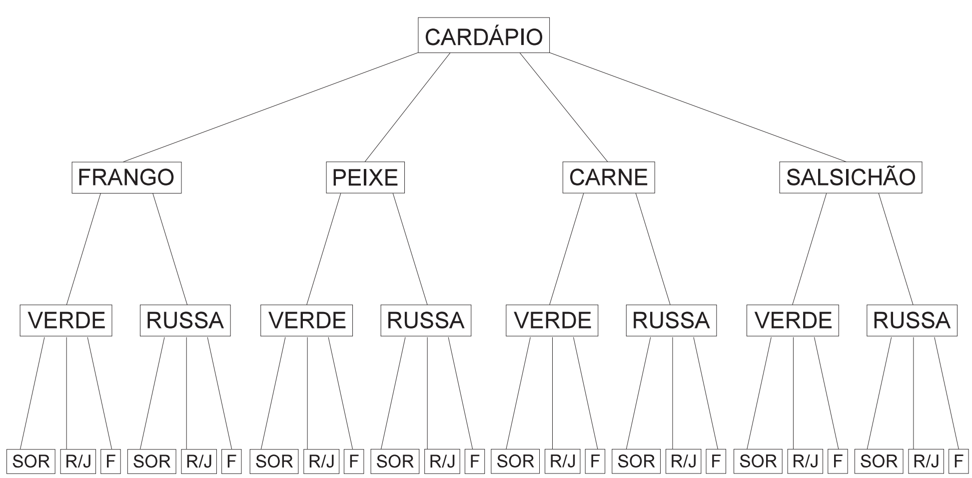
Assim, Maria dispõe de $3 \cdot 2 =$ **6 maneiras** de tomar as decisões d_1 e d_2, ou seja, 6 possibilidades diferentes de se vestir.

EXEMPLO 2

Um restaurante prepara 4 pratos quentes (frango, peixe, carne assada, salsichão), 2 saladas (verde e russa) e 3 sobremesas (sorvete, romeu e julieta, frutas). De quantas maneiras diferentes um freguês pode se servir consumindo um prato quente, uma salada e uma sobremesa?

Solução:

Esse e outros problemas da análise combinatória podem ser representados pela conhecida árvore de possibilidades ou grafo. Veja como representamos por uma "árvore" o problema do cardápio do restaurante.



Observe que nesse problema temos três níveis de decisão:

$\mathbf{d_1}$: escolher um dentre os 4 tipo de pratos quentes.

$\mathbf{d_2}$: escolher uma dentre as 2 variedades de salada.

$\mathbf{d_3}$: escolher uma das 3 sobremesas oferecidas.

Usando o princípio multiplicativo, concluímos que temos $4 \cdot 2 \cdot 3 = 24$ maneiras de tomarmos as três decisões, ou seja, **24 opções de cardápio**.

A representação gráfica em árvore de possibilidades é muito ilustrativa. Nela podemos ver claramente os três níveis de decisão d_1, d_2 e d_3, consultando os vários tipos de cardápios possíveis. Observe que, percorrendo as opções dadas pelos segmentos à esquerda da árvore, o cardápio ficaria *frango/salada verde/sorvete* enquanto que, escolhendo os segmentos à direita, teríamos *salsichão/salada russa/ frutas*. No entanto, nosso objetivo é saber as combinações possíveis e calcular o número total de possibilidades sem precisar enumerá-las, pois muitas vezes isso será impossível devido ao grande número de opções e/ou de decisões envolvidos num problema.

As técnicas da análise combinatória, como o princípio multiplicativo, nos fornecem soluções gerais para atacar certos tipos de problema. No entanto, esses problemas exigem engenhosidade, criatividade e uma plena compreensão da situação descrita. Portanto, é preciso estudar bem o problema, as condições dadas e as possibilidades envolvidas, ou seja, ter perfeita consciência dos dados e da resolução que se busca.

EXEMPLO 3

Se o restaurante do exemplo anterior oferecesse dois preços diferentes, sendo mais baratas as opções que incluíssem frango ou salsichão com salada verde, de quantas maneiras você poderia se alimentar pagando menos?

Solução:

Note que agora temos uma condição sobre as decisões d_1 e d_2:

d_1: escolher um dentre 2 pratos quentes (frango ou salsichão).

d_2: escolher salada verde (apenas uma opção).

d_3: escolher uma das 3 sobremesas oferecidas.

Então, há $2 \cdot 1 \cdot 3$ = **6 maneiras** de montar cardápios econômicos. (Verifique os cardápios mais econômicos na árvore de possibilidades do exemplo anterior).

EXEMPLO 4

Quantos números naturais de 3 algarismos distintos existem?

Solução:

Um número de 3 algarismos **c d u** é formado por 3 ordens: Como o algarismo da ordem das centenas não pode ser zero, temos então três decisões:

d_1: escolher o algarismo da centena diferente de zero (9 opções).

d_2: escolher o algarismo da dezena diferente do que já foi escolhido para ocupar a centena (9 opções).

d_3: escolher o algarismo da unidade diferente dos que já foram utilizados (8 opções).

Portanto, o total de números formados será $9 \cdot 9 \cdot 8$ = **648 números**.

EXEMPLO 5

De acordo com o exemplo anterior, se desejássemos contar dentre os 648 números de 3 algarismos distintos apenas os que são pares (terminados em 0, 2, 4, 6 e 8), como deveríamos proceder?

Solução*:

c	**d**	**u**

O algarismo da unidade poderá ser escolhido de 5 modos (0, 2, 4, 6 e 8). Se o zero foi usado como último algarismo, o primeiro pode ser escolhido de 9 modos (não podemos usar o algarismo já empregado na última casa). Se o zero não foi usado como último algarismo, o primeiro só pode ser escolhido de 8 modos (não podemos usar o zero, nem o algarismo já empregado na última casa).

Para vencer este impasse, temos três alternativas:

a) "Abrir" o problema em casos (que é alternativa mais natural). Contar separadamente os números que têm zero como último algarismo (unidade = 0) e aqueles cujo último algarismo é diferente de zero (unidade ¹ 0).

Terminando em zero temos 1 modo de escolher o último algarismo, 9 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o do meio (algarismo da dezena), num total de $1 \cdot 9 \cdot 8 = 72$ números.

Terminando em um algarismo diferente de zero temos 4 modos de escolher o último algarismo (2, 4, 6, ou 8), 8 modos de escolher o primeiro algarismo (não podemos usar o zero, nem o algarismo já usado na última casa) e 8 modos de escolher o algarismo do meio (não podemos usar os dois algarismos já empregados nas casas extremas). Logo, temos $4 \cdot 8 \cdot 8 = 256$ números terminados em um algarismo diferente de zero. A resposta é, portanto, **72 + 256 = 328 números**.

b) Ignorar uma das restrições (que é uma alternativa mais sofisticada). Ignorando o fato de zero não poder ocupar a centena, teríamos 5 modos de escolher o último algarismo, 9 modos de escolher o primeiro e 8 modos de escolher o do meio, num total $5 \cdot 8 \cdot 9 = 360$ números. Esses 360 números incluem números começados por zero, que devem ser descontados. Começando em zero temos 1 modo de escolher o primeiro algarismo (0), 4 modos de escolher o último (2, 4, 6 ou 8) e 8 modos de escolher o do meio (não podemos usar os dois algarismos já empregados nas casas extremas), num total de $1 \cdot 4 \cdot 8 = 32$ números. A resposta é, portanto, **360 - 32 = 328 números**.

c) É claro que também poderíamos ter resolvido o problema determinando todos os números de 3 algarismos distintos ($9 \cdot 9 \cdot 8 = 648$ números), como é o caso do Exemplo 4, e abatendo os números ímpares de 3 algarismos distintos (5 na última casa, 8 na primeira e 8 na segunda), num total de $5 \cdot 8 \cdot 8 = 320$ números. Assim, a resposta seria **648 - 320 = 328 números**.

Fonte: * Solução proposta pelo prof. Augusto César de Oliveira Morgado no livro "***Análise Combinatória e Probabilidade***" - IMPA/VITAE/1991.

EXEMPLO 6

As placas de automóveis eram todas formadas por 2 letras (inclusive K, Y e W) seguidas por 4 algarismos. Hoje em dia, as placas dos carros estão sendo todas trocadas e passaram a ter 3 letras seguidas e 4 algarismos. Quantas placas de cada tipo podemos formar?

Solução:

No primeiro caso

L	**L**	**N**	**N**	**N**	**N**

Como cada letra (L) pode ser escolhida de 26 maneiras e cada algarismo (N) de 10 modos distintos, a resposta é:

$$26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = \mathbf{6\,760\,000}$$

No segundo caso

L	**L**	**L**	**N**	**N**	**N**	**N**

$$26 \cdot 26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 26 \cdot 6\,760\,000 = \mathbf{175\,760\,000}$$

A nova forma de identificação de automóveis possibilita uma variedade 26 vezes maior. A diferença é de **169.000.000**, ou seja, 169 milhões de placas diferentes a mais do que anteriormente.

Exercícios

Exercício 1.
Numa sala há 4 homens e 3 mulheres. De quantos modos é possível selecionar um casal homem-mulher?

Exercício 2.
a) Quantos números naturais de 2 algarismos distintos existem?
b) Quantos destes números são divisíveis por 5?

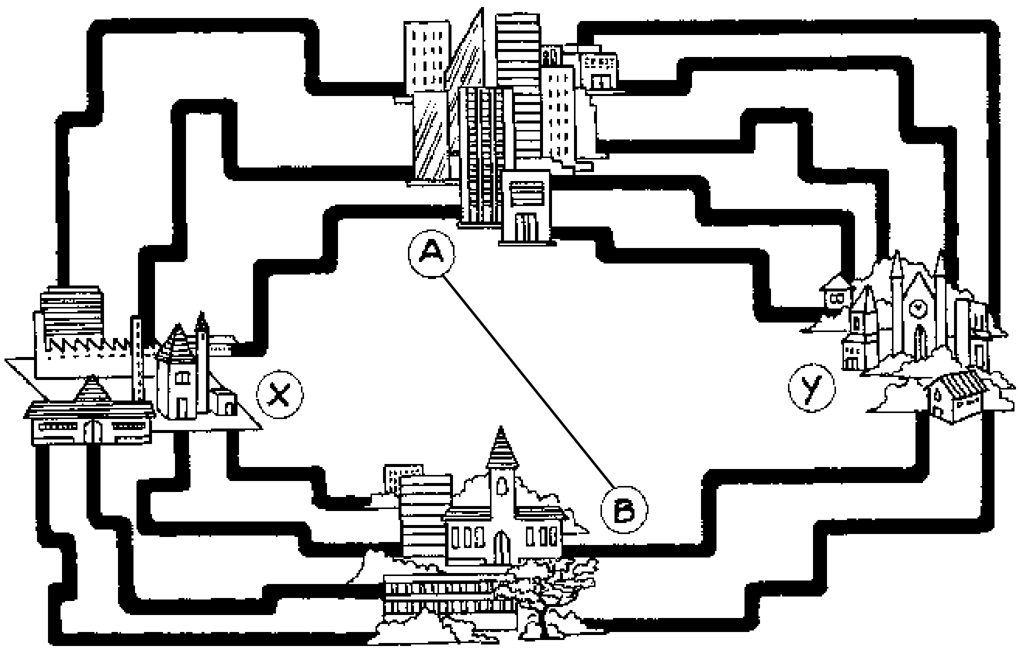
Exercício 3.
Quantas palavras contendo 3 letras diferentes podem ser formadas com um alfabeto de 26 letras?

Exercício 4.
Quantos são os gabaritos possíveis para um teste de 10 questões de múltipla escolha, com 5 alternativas por questão?

Exercício 5.
Com todos os números de 01 a 50, quantas escolhas de 6 números distintos podemos fazer?

Exercício 6.

De quantas maneiras você pode ir da cidade X para a cidade Y?



Exercício 7.

O código morse usa “palavras” contendo de 1 a 4 “letras”, representadas por ponto e traço. Quantas “palavras” existem no código morse?

Exercício 8.

O segredo de um cofre é formado por uma seqüência de 4 números de 2 dígitos (de 00 a 99). Uma pessoa decide tentar abrir o cofre sem saber a formação do segredo (por exemplo: 15 - 26 - 00 - 52). Se essa pessoa levar 1 segundo para experimentar cada combinação possível, trabalhando ininterruptamente e anotando cada tentativa já feita para não repeti-la, qual será o tempo máximo que poderá levar para abrir o cofre?

Exercício 9.

No Exemplo 6 vimos que existem 175.760.000 placas diferentes de três letras e quatros algarismos. José Carlos Medeiros gostaria de que a placa de seu automóvel tivesse as iniciais do seu nome. Quantas placas existem com as letras JCM?