AULA

50

Continuando com permutações

Introdução

O título desta aula já indica que continuaremos o assunto da Aula 49, em que vimos vários exemplos de permutações denominadas "permutações simples" e "permutações simples com restrições". Você deve ter notado que em todos aqueles exemplos permutamos objetos distintos: 3 caixas diferentes, pessoas diferentes, números formados por algarismos diferentes, anagramas da palavra MARTELO (que não têm letras repetidas) etc. Como deveríamos proceder se quiséssemos saber o número de anagramas possíveis com as letras da palavra M**A**DEIR**A** ou da palavra **PRÓPRIO**?

Nossa aula

Nesta aula você estudará permutações com objetos nem todos distintos. Outro caso que será estudado é o que chamamos de permutação circular. Só para você já ir pensando, no Exemplo dos 7 presidentes, eles sempre se sentavam lado a lado. O que aconteceria se fôssemos arrumá-los numa mesa redonda? Será que teríamos o mesmo número de permutações diferentes? Além de acompanhar cuidadosamente os exemplos, você precisa resolver os exercícios, discutir sua solução com outras pessoas e até inventar problemas. Matemática se aprende fazendo!

Permutações com repetição

EXEMPLO 1

A palavra M**A**DEIR**A** possui sete letras, sendo duas letras A e cinco letras distintas: M, D, E, I, R. Quantos anagramas podemos formar com essa palavra?

Solução:

O número de permutações de uma palavra com sete letras distintas (MARTELO) é igual a 7! = 5040. Neste exemplo formaremos uma quantidade menor de anagramas, pois são iguais aqueles em que uma letra A aparece na 2ª casa e a outra letra A na 5ª casa (e vice-versa).

Para saber de quantas maneiras podemos arrumar as duas letras A, precisamos de 2 posições. Para a primeira letra A teremos 7 posições disponíveis e para a segunda letra A teremos 6 posições disponíveis (pois uma das 7 já foi ocupada).

Temos então, $7 \cdot \frac{6}{2} = 21$ opções de escolha.

A divisão por 2 é necessária para não contarmos duas vezes posições que formam o mesmo anagrama (como, por exemplo, escolher a 2ª e 5ª posições e a 5ª e 2ª posições).

Agora vamos imaginar que as letras A já foram arrumadas e ocupam a 1ª e 2ª posições:

A A _ _ _ _ _

Nas 5 posições restantes devemos permutar as outras 5 letras distintas, ou seja, temos 5! = 120 possibilidades. Como as 2 letras A podem variar de 21 maneiras suas posições, temos como resposta:

$\frac{7 \cdot 6}{2} \cdot 5! = 21 \cdot 120 = 2520$ anagramas da palavra M**A**DEIR**A**

EXEMPLO 2

Uma urna contém 10 bolas: 6 pretas e 4 brancas. Quantas são as maneiras de se retirar da urna, uma a uma, as 10 bolas?

Solução:

Vejamos primeiro algumas possibilidades de se retirar as bolas da urna, uma a uma:

Nesse exemplo temos uma permutação de 10 elementos. Caso fossem todos distintos, nossa resposta seria **10!**. No entanto, o número de permutações com repetição de 6 bolas pretas e 4 bolas brancas será menor.

Se as bolas brancas (que são iguais) fossem numeradas de 1 a 4, as posições seriam diferentes:

etc...

Note que para cada arrumação das bolas brancas temos 4! = 24 permutações que são consideradas repetições, ou seja, que não fazem a menor diferença no caso de as bolas serem todas iguais.

Da mesma forma, para cada posição em que as 6 bolas pretas aparecerem **não** devemos contar as repetições ou as trocas entre as próprias bolas pretas. O número de repetições é 6! = 720.

Concluímos, então, que as maneiras de se retirar uma a uma 6 bolas pretas e 4 bolas brancas, sem contar as repetições, é:

$$\frac{10!}{4!\ 6!} = \frac{3.628.800}{24.720} = 210$$

EXEMPLO 3

Quantos anagramas podemos formar com a palavra **PRÓPRIO**?

Solução:

Este exemplo é parecido com o das bolas pretas e brancas. Mas observe que aqui temos 7 letras a serem permutadas, sendo que as letras P, R e O aparecem 2 vezes cada uma e a letra I, apenas uma vez.

Como no caso anterior, teremos 2! repetições para cada arrumação possível da letra P (o mesmo ocorrendo com as letras R e O). O número de permutações sem repetição será, então:

$$\frac{7!}{2!\ 2!\ 2!}$$

7! ® número total de permutações de 7 letras.

2! 2! 2! ® produto das repetições possíveis com as letras P, R e O.

$$\frac{5040}{2 \cdot 2 \cdot 2} = 630$$

Uma expressão geral para permutações com objetos nem todos distintos

Havendo **n** elementos para permutar e dentre eles um elemento se repete **p** vezes e outro elemento se repete **q** vezes, temos:

$$\boxed{\frac{n!}{p!\ q!}}$$

No exemplo anterior, você viu que podemos ter mais de 2 elementos que se repetem. Neste caso, teremos no denominador da expressão o produto dos fatoriais de todos os elementos que se repetem.

Simplificando fatoriais

Uma fração com fatoriais no numerador e no denominador pode ser facilmente simplificada. Observe os exemplos:

a) $\dfrac{10!}{6!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7$

b) $\dfrac{5!}{7!} = \dfrac{5!}{7 \cdot 6 \cdot 5!} = \dfrac{1}{7 \cdot 6}$

c) $\dfrac{n!}{(n-1)!} = \dfrac{n \cdot (n-1)!}{(n-1)!} = n$

d) $\dfrac{5!}{3!\ 2!} = \dfrac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3!\ 2!} = \dfrac{5 \cdot 4}{2 \cdot 1} = 5 \cdot 2$

Permutações circulares

Permutações circulares são os casos de permutações em que dispomos **n** elementos em **n** lugares em torno de um círculo. Veja um exemplo.

De quantos modos podemos formar uma roda com 5 crianças?

Para formar uma roda com 5 crianças, não basta escolher uma ordem para elas. Vamos nomear as 5 crianças por A, B, C, D, E. Observe que as rodas abaixo, por exemplo, são iguais:

Em cada uma dessas rodas, se seus elementos fossem arrumados em fila, teríamos permutações diferentes; no entanto, dispostos de forma circular, não dão origem a rodas diferentes; temos 5 rodas iguais, pois a posição de cada criança em relação às outras é a mesma e a roda foi apenas "virada".

Como não queremos contar rodas iguais, nosso resultado não é o número de permutações com 5 elementos em 5 posições, ou seja, 5! = 120. Já que cada roda pode ser "virada" de cinco maneiras, o número total de permutações, 120 rodas, contou cada roda diferente 5 vezes e a resposta do problema é:

$$\frac{120}{5} = 24$$

Uma expressão geral para permutações circulares

Nas permutações simples importam os lugares que os objetos ocupam e nas permutações circulares importa a posição relativa entre os objetos, ou seja, consideramos equivalentes as arrumações que possam coincidir por rotação.

Se temos **n** objetos, cada disposição equivalente por rotação pode ser obtida de **n** maneiras. Confirme isso com os exemplos a seguir:

a) 3 elementos: A, B, C. Considere a roda ABC. As rodas BCA e CAB são rodas equivalentes.

b) 8 elementos: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Verifique que as 8 rodas abaixo são equivalentes:

1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8
8 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7
7 – 8 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6
6 – 7 – 8 – 1 – 2 – 3 – 4 – 5
5 – 6 – 7 – 8 – 1 – 2 – 3 – 4
4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 1 – 2 – 3
3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 1 – 2
2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 1

A expressão geral do número de permutações circulares será o número total de permutações, n!, dividido pelas **n** vezes que cada roda equivalente foi contada:

$$\boxed{\frac{n!}{n} = \frac{n \cdot (n-1)!}{n} = (n-1)!}$$

EXEMPLO 4

Quantas rodas de ciranda podemos formar com 8 crianças?

Solução:

Podemos formar $\frac{8!}{8} = 7! = 5040$ **rodas diferentes**.

EXEMPLO 5

Se no encontro dos 7 presidentes as reuniões fossem ocorrer ao redor de uma mesa, de quantas maneiras poderíamos organizá–los?

Solução:

$$\frac{7!}{7} = 6! = 720$$ posições circulares diferentes.

EXEMPLO 6

Neste mesmo exemplo, o que ocorreria se dois dos 7 presidentes não devessem sentar juntos?

Solução:

Neste caso, poderíamos contar as permutações circulares dos outros 5 presidentes e depois encaixar os 2 que devem ficar separados nos espaços entre os 5 já arrumados.

O número de permutações circulares com 5 elementos é $4! = 24$, e entre eles ficam formados 5 espaços. Veja a figura:

Se os presidentes F e G forem colocados em 2 destes 5 espaços, eles não ficarão juntos. Temos então 5 opções para sentar o presidente F e 4 opções (uma foi ocupada por F) para sentar o presidente G.

A resposta a este problema é $5 \cdot 4 \cdot 4! = 480$

Exercícios

Exercício 1.
Quantos são os anagramas da palavra T**E**L**E**CURSO?

Exercício 2.
Quantos são os anagramas da palavra T**ELE**S**ALA**?

Exercício 3.
Quantos são os números de 7 algarismos, maiores que 6 000 000, que podemos formar usando apenas os algarismos 1, 3, 6, 6, 6, 8, 8?

Exercício 4.

Numa prova de 10 questões, todos os alunos de uma classe tiveram nota 8 (acertaram 8 questões e erraram 2). O professor, desconfiado, resolveu comparar todas as provas e ficou feliz ao verificar que em toda a classe não havia duas provas iguais. Qual o número máximo de alunos que essa classe pode ter?

Exercício 5.

De quantos modos 5 casais podem formar uma roda de ciranda?

Exercício 6.

De quantos modos 5 casais podem formar uma roda de ciranda, de maneira que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?

Exercício 7.

De quantos modos 5 casais podem formar uma roda de ciranda, de maneira que cada homem permaneça ao lado de sua mulher?

Exercício 8.

De quantos modos 5 casais podem formar uma roda de ciranda, de maneira que cada homem permaneça ao lado de sua mulher e que pessoas do mesmo sexo não fiquem juntas?