AULA

52

Revisão de combinatória

Introdução

Nesta aula, vamos "misturar" os vários conceitos aprendidos em **análise combinatória**. Desde o princípio multiplicativo até os vários tipos de permutações e combinações.

Isso servirá para que você adquira segurança na interpretação e resolução de problemas. Novamente, propomos que você tente resolver cada exemplo e só depois confira sua solução com a nossa.

Nossa aula

EXEMPLO 1

Uma diarista tem 10 casas para trabalhar, mas todas as donas-de-casa querem que ela trabalhe uma vez por semana. Sabendo que domingo é seu dia livre e que só em duas casas ela pode trabalhar no sábado, calcule de quantas formas a diarista pode organizar sua semana.

Solução:

Este é um problema em que a ordem faz diferença, mas não podemos usar todos os objetos (das 10 casas só podemos escolher 6). Assim, aplicamos o princípio multiplicativo para resolvê-lo.

No sábado escolhemos 1 entre 2 casas.

De segunda à sexta, temos: $8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 6\,720$

Assim, as formas de organizar a semana são: $6\,720 \cdot 2 =$ **13 440 formas**

EXEMPLO 2

Uma bibliotecária recebeu uma doação de 3 livros diferentes de Matemática, 4 livros diferentes de Química e 3 livros diferentes de Física. De quantas formas ela poderá arrumá-los em uma prateleira de livros novos?

Solução:

Neste problema, usamos todos os objetos (os 10 livros) e a ordem de arrumação faz diferença. Logo, trata-se de uma permutação de 10 objetos.

$10! = 3\,628\,800$

Há **3 628 800 maneiras** de arrumar os livros na prateleira.

EXEMPLO 3

No exemplo anterior, a bibliotecária levou a maior bronca, pois deveria ter deixado junto os livros de mesma matéria! E agora, de quantas formas poderá arrumá-los?

Solução:

Os três livros de Matemática podem ser arrumados de $3! = 6$ maneiras. Os quatros de Física de $4! = 24$ maneiras e os de Química de $3! = 6$ maneiras.

Além disso, podemos variar a ordem de arrumação das matérias:

Química, Física, Matemática	ou
Física, Química, Matemática	ou
Matemática, Física, Química	etc.

Como podemos variar a ordem das matérias de $3! = 6$ formas diferentes, poderemos arrumar os livros de

6	·	24	·	6	·	6	=	**5 184 maneiras**
↓		↓		↓		↓		
Matem.		**Física**		**Química**		**Ordem das matérias**		

EXEMPLO 4

Imagine que, além da exigência do problema anterior (que os livros de cada matéria fiquem juntos), haja dois livros de Física iguais e dois livros de Matemática também iguais. Quantas formas diferentes existem de arrumar os livros na prateleira?

Solução:

Se há dois livros de Física e dois de Matemática iguais, temos permutações com repetição para os livros dessas matérias.

Observando a solução do Exemplo 3, temos:

$\frac{6}{2!}$	·	$\frac{24}{2!}$	·	6	·	6	=	$\frac{6}{2} \cdot \frac{24}{2} \cdot 36 = 1296$
↓		↓		↓		↓		
Matem.		**Física**		**Química**		**Ordem**		

Portanto, há **1296 formas** de arrumar os livros.

EXEMPLO 5

Dos 12 jogadores levados para uma partida de vôlei, apenas 6 entrarão em quadra no início do jogo. Sabendo que 2 são levantadores e 10 são atacantes, como escolher 1 levantador e 5 atacantes?

Solução:

Dos 2 levantadores escolheremos 1, e dos 10 atacantes apenas 5 serão escolhidos. Como a ordem não faz diferença, temos:

$$C_2^1 = \frac{2!}{(2-1)!1!} = \frac{2!}{1!1!} = \frac{2 \cdot 1}{1 \cdot 1} = 2 \quad \text{escolhas do levantador}$$

$$C_{10}^5 = \frac{10!}{(10-5)!5!} = \frac{10!}{5!5!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252 \quad \text{escolhas dos 5 atacantes}$$

Logo, teremos $2 \cdot 252 =$ **504** formas de escolher o time.

EXEMPLO 6

Durante o jogo, 2 atacantes e o levantador foram substituídos. De quantas formas isso poderia ser feito?

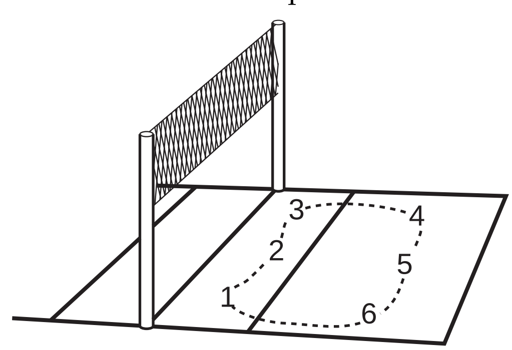
Solução:

Dos jogadores que não estavam na quadra, 1 era levantador e 5 eram atacantes. Assim, só há uma forma de substituir o levantador e C_5^2 formas de substituir os dois atacantes. Logo, as substituições poderiam ter sido feitas de:

$$1 \cdot C_5^2 = 1 \cdot \frac{5!}{(5-2)!2!} = 1 \cdot \frac{5!}{3!2!} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3!}{3! \cdot 2!} = 10 \quad \text{formas diferentes.}$$

EXEMPLO 7

Ainda na partida de vôlei, depois de escolhido o time que entrará em campo, é preciso decidir sua posição na quadra. Esse posicionamento é mantido durante todo o "set", havendo apenas uma rotação do time à cada "vantagem" conseguida. De quantas formas o técnico pode arrumar os 6 jogadores escolhidos na quadra?



Solução:

Como se trata do número de permutações circulares de 6 elementos, temos:

$$\frac{6!}{6} = 5! = 120$$

EXEMPLO 8

Quantas seriam as opções, se contássemos todos os times com todas as posições possíveis na quadra?

Solução:

No Exemplo 5 teríamos 504 formas de escolher o time. Como cada time pode ser arrumado na quadra de 120 maneiras, a resposta é $504 \cdot 120 =$ **60 480 opções**.

EXEMPLO 9

Seis homens e três mulheres inscreveram-se para trabalhar com menores carentes num projeto da prefeitura local, mas serão escolhidos apenas 5 participantes. De quantas formas podemos escolher a equipe de modo que haja pelo menos uma mulher?

Solução:

Há duas formas de resolver este problema:

Primeira. Como tem de haver **pelo menos uma mulher** no grupo, podemos ter 1, 2 ou 3 mulheres. Portanto, as maneiras de escolhê-las são:

$C_3^3 \quad \Rightarrow \quad$ três mulheres

$C_3^2 \quad \Rightarrow \quad$ duas mulheres

$C_3^1 \quad \Rightarrow \quad$ uma mulher

Quando houver três mulheres no grupo, poderemos escolher apenas dois homens; se houver duas mulheres, escolheremos três homens e quando houver apenas uma mulher, serão escolhidos quatro homens. Então, o número de grupos será:

$$\underbrace{C_3^3}_{\textbf{3 mulheres}} \cdot \underbrace{C_6^2}_{\textbf{2 homens}} + \underbrace{C_3^2}_{\textbf{2 mulheres}} \cdot \underbrace{C_6^3}_{\textbf{3 homens}} + \underbrace{C_3^1}_{\textbf{1 mulher}} \cdot \underbrace{C_6^4}_{\textbf{4 homens}}$$

Observe que somamos os números de cada alternativa porque devemos optar por uma ou outra. Isto significa que um grupo pode ter:

3 mulheres e 2 homens **ou**
2 mulheres e 3 homens **ou**
1 mulher e 4 homens

Calculando, obtemos:

$$C_3^3 \cdot C_6^2 + C_3^2 \cdot C_6^3 + C_3^1 \cdot C_6^4 =$$

$$= \frac{3!}{3!} \cdot \frac{6!}{4!2!} + \frac{3!}{1!2!} \cdot \frac{6!}{3!3!} + \frac{3!}{2!1!} \cdot \frac{6!}{4!} =$$

$$= 15 + 60 + 45 = 120$$

Logo, há **120 grupos de 5 pessoas** com pelo menos uma mulher.

Segunda. Depois de calcularmos o número total de combinações de 5 pessoas que podemos formar com 6 homens e 3 mulheres (9 pessoas), calcularemos o número de grupos onde não há **nenhuma mulher**. Subtraindo o segundo do primeiro (total de combinações) encontraremos a quantidade de grupos onde há pelo menos uma mulher:

$$C_9^5 = \frac{6!}{4!5!} = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

Grupos onde não há mulher:

$$C_9^5 = \frac{6!}{1!5!} = 6$$

(C_6^5 = 6 homens combinados 5 a 5)

Logo, o número de grupos onde há pelo menos uma mulher será:

$126 - 6 =$ **120**

Este resultado já havia sido obtido pelo outro método de resolução. Assim como este, muitos outros problemas de análise combinatória podem ser resolvidos de mais de uma maneira. O importante é interpretá-los corretamente, de acordo com o enunciado.

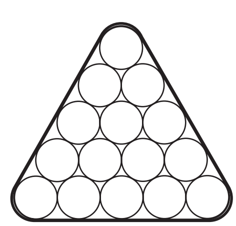
Exercícios

Exercício 1

Tenho 15 pares de meias das quais 5 são brancas, 4 são pretas e as demais são coloridas e diferentes umas das outras. Fiz um "rolinho" com cada par e quero enfileirá-los em minha gaveta. De quantas formas posso fazê-lo, deixando juntas as meias brancas, pretas e coloridas?

Exercício 2

Em um certo jogo de bilhar existem 6 bolas vermelhas idênticas e mais 9 bolas coloridas. Sabendo que as bolas são arrumadas na mesa com a ajuda de um triângulo de madeira, responda: de quantas formas elas podem ser arrumadas?



Exercício 3

Um grupo de 8 pessoas se hospedará em um hotel. De quantas formas elas poderão se arrumar, sendo 3 no quarto 2A, 3 no quarto 2B e 2 no quarto 2C?

Exercício 4

Um jardineiro tem 8 tipos diferentes de flores para plantar em 8 canteiros dispostos em círculo ao redor de um chafariz. De quantas formas ele pode compor os canteiros?

Exercício 5

De quantas formas podemos preencher um cartão de loteria esportiva (com 13 jogos) fazendo apenas jogos simples (isto é, uma alternativa em cada jogo: coluna 1, coluna 2 ou coluna do meio)?

Exercício 6

Em uma empresa, o diretor de um departamento tem de escolher uma equipe para participar de um curso no exterior. Seus subordinados são 10: 5 homens e 5 mulheres. Mas a equipe será de apenas 4 pessoas e pelo menos uma terá de ser homem. Quantas possibilidades há para a escolha da equipe?