

As médias

Introdução

Na aula 29, você estudou um pouco de Estatística e aprendeu que esse ramo da Matemática trabalha com dados comparativos, pesquisas de opinião, pesquisas de mercado e projeções futuras.

Os dados numéricos obtidos por intermédio das pesquisas são mais facilmente observados quando organizados numa tabela ou por representações gráficas. No entanto, se uma tabela contém um número muito grande de dados, essa observação pode se tornar confusa. Nesses casos, torna-se mais interessante observar os dados da tabela, determinando-se a *média* desses valores.

Costumamos calcular várias médias na vida diária: a média de horas trabalhadas diariamente, a velocidade média, o salário médio de uma empresa, a produção mensal média de uma indústria, a despesa média mensal, a estatura média das pessoas, o consumo médio de gasolina etc. Ignorando as variações, a média representa situações regulares, ou seja, ignorando as variações, supõe que todos os valores de uma tabela são iguais.

| PRODUÇÃO DE VEÍCULOS | |
|----------------------|----------------|
| Mês/Ano | Nº de veículos |
| Jan/95 | 97.800 |
| Fev/95 | 130.800 |
| Mar/95 | 151.800 |
| Abr/95 | 131.200 |

(Fonte: Jornal do Brasil - 02/07/95)

Na tabela ao lado, estão indicados o número de veículos produzidos no Brasil, no período de janeiro de 1995 a abril de 1995.

No período entre janeiro de 1995 e abril de 1995, qual foi a produção média mensal de veículos?

Nossa aula

Para responder à pergunta, devemos calcular a *média aritmética* dos números apresentados na tabela. Essa média é calculada somando-se os valores dados e dividindo-se o resultado pelo número de valores. Temos, então:

$$M_a = \frac{97.800 + 130.800 + 151.800}{4} = 127.900$$

O que significa dizer que a produção média mensal de veículos, no período entre janeiro e abril de 1995, foi de 127.900 veículos? Pense um pouco.

Significa que, se numa situação imaginária, a produção mensal de veículos fosse sempre a mesma, o número de veículos produzidos seria de 127.900 por mês.

Velocidade média

Quando dizemos que, numa viagem, um carro desenvolve uma velocidade média de 80 km/h, isso não significa que o carro andou com essa velocidade o tempo todo da viagem, o que é quase impossível acontecer. Caso, numa situação imaginária, o carro fizesse a viagem com uma mesma velocidade, gastando o mesmo tempo, essa velocidade seria de 80 km/h.

Média de horas diárias de trabalho

O número de horas diárias trabalhadas por um professor, durante uma semana, estão assinaladas na tabela. Vamos calcular a média diária de horas trabalhadas.

$$M_a = \frac{7 + 6 + 10 + 11 + 6}{5} = \frac{40}{5} = 8 \text{ horas}$$

As horas que o professor trabalhou abaixo da média (2ª feira, 3ª feira e 6ª feira), no total, foram 5 horas; e as horas trabalhadas acima da média (4ª feira e 5ª feira), no total, também foram 5 horas.

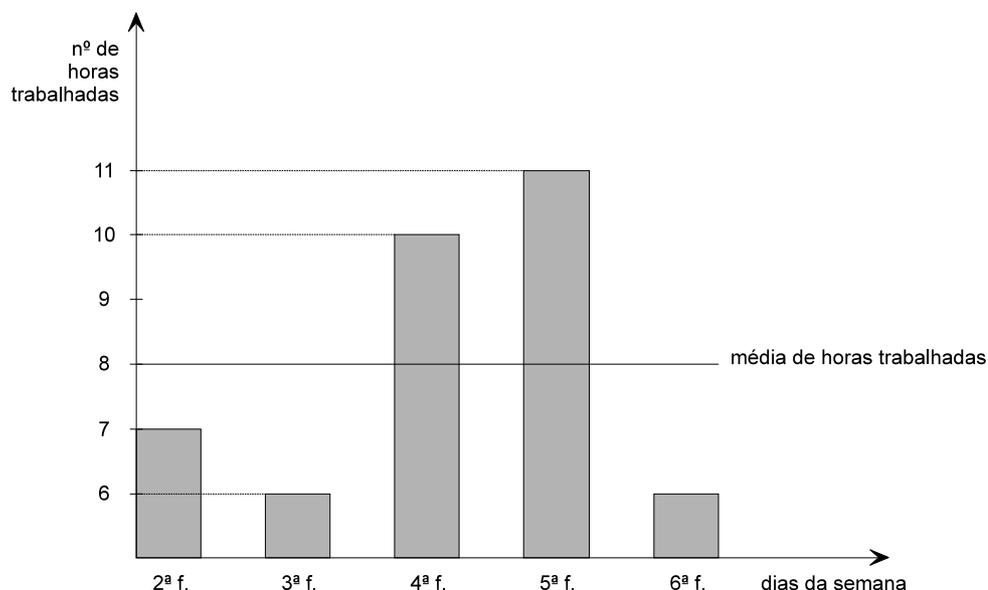
| DIAS DA SEMANA | N.º DE HORAS DE TRABALHO |
|----------------|--------------------------|
| 2ª feira | 7 h |
| 3ª feira | 6 h |
| 4ª feira | 10 h |
| 5ª feira | 11 h |
| 6ª feira | 6 h |

Verifique:

$$\begin{array}{ll}
 2^\text{ª} \text{ feira: } 8 - 7 = 1 & 4^\text{ª} \text{ feira: } 10 - 8 = 2 \\
 3^\text{ª} \text{ feira: } 8 - 6 = 2 & 5^\text{ª} \text{ feira: } 11 - 8 = 3 \\
 6^\text{ª} \text{ feira: } 8 - 6 = 2 & \\
 \text{Total: } & 5 \text{ h} \qquad \qquad \text{Total: } 5 \text{ h}
 \end{array}$$

Portanto, o número de horas trabalhadas a menos é igual ao número de horas trabalhadas a mais.

Costumamos dizer que, em relação à média, *os excessos compensam as faltas*. Podemos visualizar bem essa situação, usando um gráfico de barras:



Vejam os outros exemplos, ilustrando a idéia da média:

O peso máximo permitido dentro de um elevador de prédio residencial é, em geral, de 420 kg ou 6 pessoas, o que dá uma média de 70 kg por pessoa ($420 \div 6 = 70$).

Supondo que 5 pessoas, cujos pesos estão na tabela abaixo, entraram num elevador, qual pode ser, no máximo, o peso de uma 6ª pessoa que deseja entrar no mesmo elevador? (Os pesos, na tabela, foram arredondados para facilitar os cálculos).

| PESSOAS | PESOS |
|---------|-------|
| 1ª | 54 kg |
| 2ª | 68 kg |
| 3ª | 75 kg |
| 4ª | 58 kg |
| 5ª | 72 kg |
| 6ª | ? |

Somando os pesos das cinco pessoas que estão no elevador, encontramos 327 kg.

Como o máximo permitido é 420 kg, o peso da 6ª pessoa pode ser até: $420 - 327 = 93$ kg.

$$\begin{array}{l} \text{excessos} \quad \left\{ \begin{array}{l} 70 - 54 = 16 \\ 70 - 68 = 2 \\ 70 - 58 = 12 \\ \hline 30 \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} 75 - 70 = 5 \\ 72 - 70 = 2 \\ \hline 7 \end{array} \right\} \text{faltas}$$

$$\text{Diferença: } 30 - 7 = 23$$

Logo, a 6ª pessoa pode ter $70 + 23 = 93$ kg.

Usamos nesse problema a idéia, vista anteriormente, de que em relação à média os excessos compensam as faltas.

Tente resolver o problema de outra forma, calculando os excessos e as faltas em relação à média dos pesos.

A média aritmética que já estudamos é chamada *média aritmética simples*. Vamos apresentar, agora, a *média aritmética ponderada* (ponderar = pesar), muito usada quando se torna necessário *valorizar, dar um peso* a um ou mais valores que entrarão no cálculo da média.

Cálculo da média ponderada

Numa escola, o critério para o cálculo da média de cada aluno, em cada disciplina, é o seguinte:

| | |
|--------------|--------|
| 1º bimestre: | peso 1 |
| 2º bimestre: | peso 2 |
| 3º bimestre: | peso 3 |
| 4º bimestre: | peso 4 |

Para determinar a média aritmética ponderada de um aluno que obteve, em Matemática, notas 10,0, 8,5, 7,0 e 5,5 em cada bimestre, faz-se assim: multiplica-se cada nota pelo seu peso correspondente, somando-se depois todos os resultados obtidos nas multiplicações. Em seguida, divide-se essa soma pelo total dos pesos.

$$M_p = \frac{10,0 \cdot 1 + 8,5 \cdot 2 + 7,0 \cdot 3 + 5,5 \cdot 4}{1+2+3+4} = 7,0$$

A média desse aluno, em Matemática, é 7,0.

A média ponderada pode facilitar o cálculo de médias, quando aparecem uma ou mais parcelas repetidas várias vezes. Nesse caso, multiplicamos as parcelas pelo número de vezes em que elas aparecem. Veja o exemplo:

Em uma empresa, 25 empregados ganham R\$ 150,00, 10 ganham R\$ 220,00 e 5 ganham R\$ 280,00. Qual é o salário médio que essa empresa paga?

$$M_p = \frac{25 \cdot 150 + 10 \cdot 220 + 5 \cdot 280}{25+10+5} = 183,75$$

O salário médio dos empregados dessa empresa é de R\$ 183,75.

Média geométrica

Chamamos de *média geométrica* de dois números positivos a raiz quadrada do produto desses dois números.

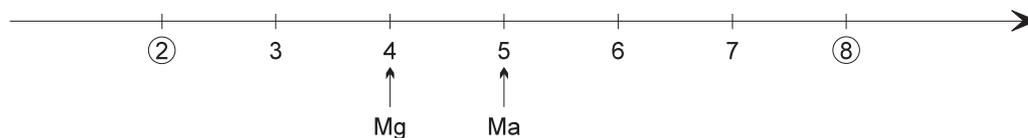
EXEMPLO

A média geométrica dos números 2 e 8 é:

$$M_g = \sqrt{2 \cdot 8} = \sqrt{16} = 4$$

Comparando esse resultado com a média aritmética dos mesmos números, e assinalando os dois resultados na reta numérica, temos:

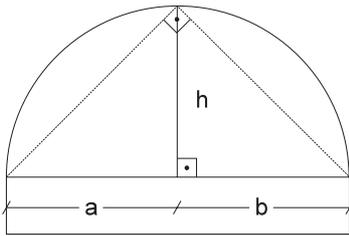
$$M_a = \frac{2 + 8}{2} = \frac{10}{2} = 5$$



A média aritmética é o *ponto médio* entre 2 e 8 e a média geométrica é menor que a média aritmética.

Aplicação da média geométrica

Na fase de perfuração de um túnel, os operários precisam colocar estacas para sustentação. Vamos calcular o comprimento de uma estaca, em determinado ponto. Assim:



Vamos lembrar que todo ângulo inscrito numa semi-circunferência mede 90° . Logo, o triângulo formado na figura é um triângulo retângulo e a estaca é a altura desse triângulo.

Sabemos, do estudo de relações métricas no triângulo retângulo, que:

$$h^2 = a \cdot b$$

ou

$$h = \sqrt{a \cdot b}$$

Podemos dizer, então, que o comprimento da estaca é a média geométrica das distâncias entre o ponto de apoio da estaca e as laterais do túnel.

Exercício 1

Num concurso, constavam provas de Português, Matemática e Ciências. Português e Matemática tinham peso 2 e Ciências, peso 1. Calcule a média ponderada de um candidato que tirou as seguintes notas:

Português: 6,0

Matemática: 7,0

Ciências: 5,0

Exercício 2

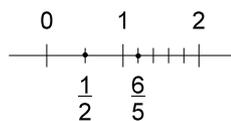
Calcule a média das alturas de uma equipe de basquete, que estão indicadas na tabela abaixo:

| JOGADOR | ALTURA (m) |
|---------|------------|
| 1º | 1,80 |
| 2º | 1,84 |
| 3º | 1,90 |
| 4º | 1,88 |
| 5º | 1,86 |

Exercícios

Exercício 3

Numa reta numérica, assinalamos o número que está localizado no meio da distância entre os números $\frac{1}{2}$ e $\frac{6}{5}$. Determine o número:



Exercício 4

A média aritmética de cinco números é 12. Quatro desses números são 6, 7, 8 e 11. Qual é o 5º número?

Exercício 5

Um carro fez uma viagem de 480 km, em 8 horas. Qual foi sua velocidade média?