AULA 57

Expoentes fracionários

Introdução

Nesta aula faremos uma revisão de potências com expoente inteiro, particularmente quando o expoente é um número negativo. Estudaremos o significado de potências com expoentes fracionários e, em seguida, verificaremos que as propriedades operatórias da potenciação são, também, válidas para as potências de expoentes fracionários e negativos. Essas propriedades são muito úteis para a resolução das equações exponenciais e, também, no estudo dos logaritmos, que serão vistos mais adiante.

Nossa Aula

Lembrando que a potenciação é uma multiplicação de fatores iguais, quando, por exemplo, escrevemos $2^3 = 8$, a ***base*** é o número 2 e o expoente 3 indica o número de fatores iguais a 2. O resultado, chamado de ***potência***, é o número 8.

$$\underbrace{2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8}_{\displaystyle\downarrow \atop \text{3 fatores}}$$

E qual o significado de uma potência com expoente negativo? Esse tipo de potência representa uma fração onde o numerador é 1 e o denominador é a mesma potência, com o expoente positivo.

Por exemplo 5^{-2} é igual a $5^{\frac{1}{2}}$.

De forma geral, se $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, então:

$$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$$

Vamos calcular algumas potências com expoentes negativos:

$$5^{-2} = \frac{1}{5^2} = \frac{1}{25} \quad \text{ou} \quad 0{,}04 \quad \text{(dividindo 1 por 25)}$$

$$10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1.000} \quad \text{ou} \quad 0{,}001 \text{ (um milésimo)}$$

$$2^{-4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16} \quad \text{ou} \quad 0{,}0625 \text{(dividindo 1 por 16)}$$

Quando temos uma fração com numerador igual a 1, podemos escrevê-la como uma potência de base inteira e expoente negativo.

$$\frac{1}{3^5} = 3^{-5}$$

$$\frac{1}{7} = 7^{-1}$$

$$\frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

Podemos, ainda, transformar um número decimal numa potência de expoente negativo, ou num produto de um número por uma potência negativa.

EXEMPLO 1

$$0{,}01 = \frac{1}{100} = \frac{1}{10^2} = 10^{-2}$$

EXEMPLO 2

$$0{,}125 = \frac{125}{1000} = 125 \times \frac{1}{1000} = 125 \times \frac{1}{10^3} = 125 \times 10^{-3}$$

Expoentes fracionários

Uma potência de expoente fracionário representa uma raiz, e podemos escrevê-la assim:

$$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$$

onde $a > 0$,

m e **n** são números inteiros e $n \neq 0$

Observe que:

- o denominador da fração é o índice da raiz (n).
- a base (a) elevada ao numerador (m) é o radicando (a^m).

EXEMPLO 3

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25}$$

EXEMPLO 4

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4^1} = \sqrt{4} = 2$$

EXEMPLO 5

$$3^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{3^3} = \sqrt{27}$$

EXEMPLO 6

$$50^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{50^1} = \sqrt[3]{50}$$

Portanto, podemos escrever uma raiz em forma de potência de expoente fracionário:

$$\sqrt{9} = \sqrt{3^2} = 3^{\frac{2}{2}} = 3$$

$$\sqrt[4]{64} = \sqrt[4]{2^6} = 2^{\frac{6}{4}} = 2^{\frac{3}{2}} = \sqrt{2^3}$$

Observando esses últimos exemplos, vimos que, transformando uma raiz em potência de expoente fracionário, tendo, antes, feito a decomposição do radicando em fatores primos, justificamos a seguinte propriedade dos radicais:

Podemos dividir o índice do radical e o expoente do radicando por um mesmo número, para simplificar o radical.

Propriedades da potenciação

A seguir, enumeramos as propriedades da potenciação e damos alguns exemplos:

Primeira propriedade

Produto de potências de mesma base:

$$3^2 \cdot 3^4 = \underbrace{3 \cdot 3}_{3^2} \cdot \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{3^4} = 3^{(2+4)} = 3^6$$

Para multiplicar potências de mesma base, repetimos a base e somamos os expoentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Essa propriedade pode ser aplicada para expoentes negativos e para expoentes fracionários:

$$5^{-2} \cdot 5^5 = 5^{-2+5} = 5^3$$

$$7^{\frac{1}{2}} \times 7^{\frac{3}{2}} = 7^{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 5^{\frac{4}{2}} = 5^2$$

Segunda propriedade

Divisão de potências de mesma base:

Para dividir potências de mesma base, repetimos a base e subtraímos os expoentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Vamos aplicar essa propriedade às potências de expoentes negativos ou fracionários:

$$\frac{3^{-2}}{3^4} = 3^{-2-4} = 3^{-6}$$

$$\frac{5^{\frac{2}{3}}}{5^{\frac{1}{3}}} = 5^{\frac{2}{3}-\frac{1}{3}} = 5^{\frac{1}{3}}$$

Terceira Propriedade

Potenciação de potência:

$$(3^2)^3 = \underbrace{3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^2}_{\text{3 fatores}} = (3^2)^3 = 36$$

Para elevar uma potência a um outro expoente, repetimos a base e multiplicamos os expoentes.

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

Vejamos essa propriedade aplicada a potências com expoentes negativos ou fracionários:

$$(2^{-1})^{-3} = 2^{(-1) \times (-3)} = 2^3$$

$$\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 5^{\frac{1}{2} \times 3} = 5^{\frac{3}{2}}$$

Quarta propriedade

Distributividade em relação à multiplicação e à divisão:

$(2 \cdot 5)^2 = 2^2 \cdot 5^2$ ou

$$\left(\frac{8}{3}\right)^3 = \frac{8^3}{3^3}$$

Para elevar um produto ou um quociente a um expoente, elevamos cada fator a esse expoente ou, no caso do quociente, elevamos o dividendo e o divisor ao mesmo expoente.

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Veja alguns exemplos:

EXEMPLO 7

$$(3 \times 5)^{-4} = 3^{-4} \times 5^{-4}$$

EXEMPLO 8

$$(2 \times 3)^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}}$$

EXEMPLO 9

$$(6 \div 5)^{3} = 6^{-3} \div 5^{-3}$$

EXEMPLO 10

$$(6 \div 5)^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}} \div 5^{\frac{1}{2}}$$

AULA

57

Aplicações do cálculo de multiplicações e divisões de radicais

$$\sqrt{2} \times \sqrt{3} = 2^{\frac{1}{2}} \times 3^{\frac{1}{2}} = (2 \times 3)^{\frac{1}{2}} = 6^{\frac{1}{2}} = \sqrt{6}$$

$$\sqrt[3]{8} \div \sqrt[3]{2} = 8^{\frac{1}{3}} \div 2^{\frac{1}{3}} = (8 \div 2)^{\frac{1}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$$

Podemos multiplicar ou dividir radicais de mesmo índice, multiplicando ou dividindo os radicandos.

Se os índices forem diferentes, podemos transformar os radicais em radicais equivalentes e com mesmo índice.

$$\sqrt{5} \times \sqrt[4]{7} \times = 5^{\frac{1}{2}} \times 7^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{2}{4}} \times 7^{\frac{1}{4}} = (5^2 \times 7)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{175}$$

$$\sqrt[3]{2} \div \sqrt[4]{3} = 2^{\frac{1}{3}} \div 3^{\frac{1}{4}} = 2^{\frac{4}{12}} \div 3^{\frac{3}{12}} = \left(2^4 \div 3^3\right)^{\frac{1}{12}} = \sqrt[12]{\frac{16}{27}}$$

Exercícios

Exercício 1.

Escreva o resultado de cada item, na forma de uma única potência:

a) $3^{-2} \cdot 3 \cdot 3^4 =$

b) $\left(3^2\right)^4 \div 3^{-5} =$

c) $\dfrac{(3^2)^3}{3^5}$

d) $\dfrac{3^7}{\left(3^3\right)^3}$

Exercício 2.

Calcule o valor de $\dfrac{(5^{-1})^{-2} \times 5^{-5} \div 5^{-2}}{\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^{3} \times 5^{-1}}$

Exercício 3.

Efetue, transformando as raízes em potências de expoente fracionários:

a) $\sqrt[3]{25} \times \sqrt[3]{5} =$

b) $\sqrt{40} \div \sqrt{10} =$

c) $\sqrt{5} \times \sqrt[3]{5} =$

d) $\sqrt{\frac{1}{2}} \div \sqrt[5]{\frac{1}{2}} =$

Exercício 4.

Transforme as potências em raízes:

a) $12^{0,4} =$

b) $6^{0,5} =$

Exercício 5.

Calcule:

a) $36^{-\frac{1}{2}}$

b) $1000^{-\frac{1}{3}}$