AULA

# 58

# Equações exponenciais

## Introdução

Vamos apresentar, nesta aula, equações onde a incógnita aparece no expoente. São as ***equações exponenciais***.

Resolver uma equação é encontrar os valores da incógnita que tornam a equação verdadeira. No caso da equação exponencial, para resolvê-la, procuraremos obter sempre uma igualdade de duas potências de mesma base, pois sabemos que, se duas potências de mesma base são iguais, então, seus expoentes também são iguais. Por exemplo, para resolver a equação 3**x** = 243, podemos decompor o número 243, em fatores primos e escrevê-lo em forma de potência, assim:

$$3x = 3^5$$

logo,

$$\boxed{x = 5}$$

A solução da equação é x = 5.

## Nossa Aula

Você verá, agora, vários outros exemplos de resolução de equações exponenciais.

**EXEMPLO 1**

Resolver a equação 2x = 2.

Como já sabemos, todo número elevado a 1 (um) é igual a ele mesmo. Então, podemos escrever:

$$2x = 2^1$$

logo,

$$\boxed{x = 1}$$

A solução da equação é x = 1.

**EXEMPLO 2**

Resolver a equação $5^{2x} = 1$

Lembrando que um número diferente de zero, elevado a zero, é igual a um, a equação pode ser escrita assim:

$5^{2x} = 5^0$ Þ $2x = 0$ Þ $\boxed{x = 0}$

A solução da equação é x = 0.

**EXEMPLO 3**

Resolver a equação $3^{3x} = \frac{1}{9}$

Uma fração, cujo numerador é 1 (um), pode ser escrita na forma de uma potência de expoente negativo.

Decompondo o denominador da fração em fatores primos, temos:

$3^{3x} = \frac{1}{3^2}$ Þ $3^{3x} = 3^{-2}$

$3x = -2$ Þ $x = -\frac{2}{3}$

A solução da equação é $x = -\frac{2}{3}$

**EXEMPLO 4**

Resolva a equação $10^{x-1} = 0{,}001$

O número 0,001 pode ser escrito com uma potência de expoente negativo, logo:

$10^{x-1} = 10^{-3}$ Þ $x - 1 = -3$ Þ $x = -3 + 1$ Þ $\boxed{x = -2}$

A solução da equação é $x = -2$

**EXEMPLO 5**

Resolver a equação $5^{2x+1} = \sqrt{5}$

Vamos escrever a raiz na forma de potência de expoente fracionário, como vimos na aula anterior:

$5^{2x+1} = 5^{\frac{1}{2}}$ Þ $2x + 1 = \frac{1}{2}$

$2x = \frac{1}{2} - 1$

$2x = \frac{1-2}{2}$ Þ $2x = -\frac{1}{2}$ Þ $x = -\frac{1}{4}$

A solução da equação é $x = -\frac{1}{4}$.

**EXEMPLO 6**

Resolva a equação $4^{3x-5} = 4^{x-1}$

Neste exemplo, as potências já estão com as bases iguais, portanto, podemos igualar diretamente seus expoentes.

$$\begin{aligned} 3x - 5 &= x - 1 \\ 3x - x &= -1 + 5 \\ 2x &= 4 \\ \boxed{x = 2} \end{aligned}$$

A solução da equação é x = 2.

**EXEMPLO 7**

Resolva a equação $16^{x-3} = 2^{x+3}$

Vamos decompor 16 e escrevê-lo em forma de potência de base 2. Temos que $16 = 2^4$, logo:

$(2^4)^{x-3} = 2^{x+3}$ (vamos aplicar a propriedade da potenciação de potência).

$$2^{4(x-3)} = 2^{x+3}$$

$$2^{4x-12} = 2^{x+3} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 4x - 12 &= x + 3 \\ 4x - x &= 12 + 3 \\ 3x &= 15 \\ \boxed{x = 5} \end{aligned}$$

A solução da equação é x = 5.

Em todos os exemplos apresentados até agora, poderíamos ter conferido a resposta, substituindo a solução encontrada na equação dada.

**EXEMPLO 8**

Resolva e confira a solução da equação $\left(\frac{1}{100}\right)^x = 10^{x-3}$

Vamos substituir na equação $\frac{1}{100}$ por $10^{-2}$

$$(10^{-2})^x = 10^{x-3}$$

$$10^{-2x} = 10^{x-3} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} -2x &= x - 3 \\ -2x - x &= -3 \\ -3x &= -3 \\ \boxed{x = 1} \end{aligned}$$

Vamos agora fazer a verificação. Substituindo **x**, na equação por 1, temos:

$$\left(\frac{1}{100}\right)^1 = 10^{1-3}$$

$$\frac{1}{100} = 10^{-2} \quad , \quad \text{que é uma sentença verdadeira.}$$

Logo, a solução da equação é, de fato, x = 1.

## EXEMPLO 9

Resolva a equação $9^{2x} = 27^{x-1}$

Nesse exemplo, precisamos decompor as duas bases em fatores primos, ou seja, 9 = 3 e 27 = 3 . Temos, então:

$$(3\ )^{2x} = (3\ )^{x-1} \qquad \text{(aplicando a propriedade da potenciação da potência)}$$

$$3^{4x} = 3^{3(x-1)}$$

$$4^{4x} = 3^{3x-3} \quad \Rightarrow \quad 4x = 3x - 3$$

$$4x - 3x = -3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = -3}$$

Vamos verificar a resposta, substituindo o **x** por –3.

1º membro da equação: $9^{2 \cdot (-3)} = 9^{-6} = (3\ )^{-6} = 3^{-12}$
2º membro da equação: $27^{-3-1} = 27^{-4} = (3\ )^{-4} = 3^{-12}$

Quando substituímos a solução x = –3 nos dois membros obtemos resultados iguais.

Logo a solução da equação está correta e é, de fato, x = – 3.

Vejamos, agora, uma utilização de equações exponenciais, na resolução de problemas sobre ***progressões geométricas***.

## EXEMPLO 10

Em uma progressão geométrica, a razão é 2, o primeiro termo é 5 e o último termo é 1.280. Quantos termos possui essa progressão?

Lembrando da aula em que você aprendeu progressões geométricas, a fórmula para o cálculo do termo geral é:

$$\boxed{a_n = a_1 q^{n-1}}$$

onde $a_1$ é o 1º termo, **q** é a razão, $a_n$ é um termo qualquer e **n** é o número de termos.

Logo, substituindo os dados do problema, na fórmula, temos:

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$1280 = 5 \cdot 2^{n-1} \quad \rightarrow \quad \text{(dividindo os dois membros por 5)}$$

$$256 = 2^{n-1}$$

$$28 = 2^{n-1} \quad \Rightarrow \quad n - 1 = 8 \quad \Rightarrow \quad \boxed{n = 9}$$

A progressão geométrica possui, portanto, 9 termos.

**EXEMPLO 11**

Resolva a equação $3^{x+1} - 3^x = 1.458$

$3^{x+1} - 3x = 1.458$

$3^x \cdot 3 - 3^x = 1.458$ (aplicando a propriedade da potenciação);

$3^x\ (3 - 1) = 1.458$ (colocando 3x em evidência);

$3^x \cdot 2 = 1.458$

$3^x = 729$ (dividindo os dois membros por 2).

$3^x = 3^6$ Þ $\boxed{x = 6}$

A solução da equação é x = 6.

## Exercícios

Resolva as equações exponenciais:

**Exercício 1.**
$10^x = 1.000.000$

**Exercício 2.**
$11^{2x} = 11$

**Exercício 3.**
$2^{x+1} = 1024$

**Exercício 4.**
$6^{3x} = 1$

**Exercício 5.**
$4^x = \dfrac{1}{16}$

**Exercício 6.**
$(0,0001)^x = 10^{8-5x}$

**Exercício 7.**
$7^{3x} = \sqrt[3]{7}$

**Exercício 8.**
$5^{5x-1} = 5^{3x+5}$

**Exercício 9.**
$125^{x-1} = 5^{x+7}$

**Exercício 10.**
$100^{x-4} = 1000^x$