AULA

59

Usando potências de 10

Introdução

Nesta aula, vamos ver que todo número positivo pode ser escrito como uma potência de base 10. Por exemplo, vamos aprender que o número 15 pode ser escrito como $10^{1,176}$. Deve parecer estranho ao leitor que um número tão simples como o 15 possa ser representado de uma forma tão complicada. E, também, por que fazer isso?

A complicação é apenas aparente. Na realidade, essa nova forma de escrever os números positivos vai permitir que cálculos complicados possam ser feitos de forma muito mais simples. É só esperar um pouco para conferir.

Como estaremos lidando com potências, seria conveniente fazer uma recordação da Aula 57, onde tratamos de potências com expoentes fracionários. As propriedades que apareceram nessa aula serão utilizadas novamente.

Nossa aula

Para a teoria que vamos desenvolver nas duas aulas seguintes, precisamos mostrar que todo número positivo pode ser escrito como potência de 10. Para alguns casos, isso pode ser feito com muita facilidade. Veja:

$$\begin{aligned} 1 &= 10^0 \\ 10 &= 10^1 \\ 100 &= 10 \\ 1.000 &= 10^3 \text{ etc.} \end{aligned}$$

O mesmo ocorre para os números 0,1 , 0,01 e 0,001, como se vê a seguir:

$$\begin{aligned} 0{,}1 &= 10^{-1} \\ 0{,}01 &= 10^{-2} \\ 0{,}001 &= 10^{-3} \end{aligned}$$

No entanto, na maioria dos casos, fica difícil escrever um número como potência de base 10. Cálculos muito trabalhosos são necessários para obter, por exemplo, os seguintes resultados:

$$\begin{aligned} 2 &= 10^{0,301} \\ 3 &= 10^{0,477} \\ 7 &= 10^{0,845} \end{aligned}$$

É necessário dizer que essas últimas igualdades não são exatas. Elas são apenas aproximadas, porque os expoentes de 10 foram consideradas até a terceira casa decimal. Uma aproximação melhor para a primeira delas seria:

$$\boxed{2 = 10^{0,301029995}}$$

mas, felizmente, para as nossas necessidades, três ou quatro casas decimais serão suficientes.

Vamos ver agora que, com as informações que temos, já podemos representar outros números como potências de 10.

EXEMPLO 1

Representar os números 4 e 5 como potências de 10.

Levando em conta a informação que demos ($2 = 10^{0,301}$) e as propriedades das potências, temos:

a) $4 = 2 \cdot 2 = 10^{0,301} \cdot 10^{0,301} = 10^{0,301 + 0,301} = 10^{0,602}$

b) $5 = \dfrac{10}{2} = \dfrac{10^{1}}{10^{0,301}} = 10^{1 - 0,301} = 10^{0,699}$

O exemplo que acabamos de resolver mostra que, se conseguirmos exprimir os números primos como potências de 10, poderemos representar todos os outros da mesma forma, utilizando as propriedades das potências.

No século XVII, vários matemáticos se dedicaram a esse extenuante trabalho e construíram tabelas onde, do lado esquerdo, apareciam os números e, do lado direito, as potências de 10 correspondentes a cada um. Essas potências passaram a ser conhecidas com o nome de ***logaritmos***.

Vamos, então, reunir as informações que já temos em nossa primeira tabela de logaritmos:

NÚMEROS	LOGARITMOS
1	0,000
2	0,301
3	0,477
4	0,602
5	0,699
7	0,845
10	1,000

Dizemos que o logaritmo de 2 é 0,301 e escrevemos log 2 = 0,301. Isso significa que $10^{0,301} = 2$.

Dizemos que o logaritmo de 5 é 0,699 e escrevemos log 5 = 0,699. Isso significa que $10^{0,699} = 5$.

No exemplo a seguir, vamos efetuar os cálculos para completar a nossa tabela de logaritmos.

EXEMPLO 2

Calcular os logaritmos dos números 6, 8 e 9.

a) $6 = 2 \cdot 3 = 10^{0,301} \cdot 10^{0,477} = 10^{0,301 + 0,477} = 10^{0,778}$

Logo, o logaritmo de 6 é 0,778.

b) $8 = 4 \cdot 2 = 10^{0,602} \cdot 10^{0,301} = 10^{0,602 + 0,301} = 10^{0,903}$

Logo, o logaritmo de 8 é 0,903.

c) $9 = 3 \cdot 3 = 10^{0,477} \cdot 10^{0,477} = 10^{0,477 + 0,477} = 10^{0,954}$

Logo, o logaritmo de 9 é 0,954.

Repare num fato curioso e importante. Enquanto na coluna da esquerda os números são multiplicados, na coluna da direita os logaritmos são somados.

NÚMEROS	LOGARITMOS
$2 \cdot 3 = 6$	$0,301 + 0,477 = 0,778$

As primeiras tabelas de logaritmos apareceram na primeira metade do século XVII. Eram livros que apresentavam uma listagem dos números e, ao lado, sua potência de 10 correspondente. Essa tabela permitia substituir uma multiplicação por uma adição e uma divisão por uma subtração. Isso que dizer que a tabela de logaritmos permitiu substituir uma operação por outra de natureza mais simples.

Vamos mostrar, concretamente, o que acabamos de dizer, nos dois exemplos seguintes. O primeiro será uma preparação para o segundo.

EXEMPLO 3

Calcular o logaritmo de 1,2.

$$1,2 = \frac{12}{10} = \frac{3 \times 4}{10}$$

Vamos, então, substituir os números 3 e 4 pelas correspondentes potências de 10, que se acham em nossa pequena tabela de logaritmos, e aplicar as propriedades das potências.

$$1,2 = \frac{3 \times 4}{10} = \frac{10^{0,477} \times 10^{0,602}}{10^1}$$

$$= 10^{0,477 + 0,602 - 1}$$

$$= 10^{0,079}$$

Então, o logaritmo de 1,2 é 0,079.

EXEMPLO 4

Determinado tipo de bactéria se reproduz, aumentando seu número de 20% a cada dia. Em quantos dias o número de bactérias será 100 vezes maior que o inicial?

Vamos imaginar que tenhamos hoje, em nossa cultura de bactérias, um número **x** de bactérias. No dia seguinte, esse número terá aumentado de 20%, ou seja, será igual a:

$$x + \frac{20}{100}x = x + 0,2x = x \times 1,2$$

Portanto, a cada dia a população de bactérias fica multiplicada por 1,2, formando, portanto, uma progressão geométrica de razão 1,2. No segundo dia, teremos $\mathbf{x} \cdot 1,2^2$ bactérias, no terceiro dia $\mathbf{x} \cdot 1,2^3$ bactérias e assim por diante. Então, depois de **n** dias, teremos $\mathbf{x} \cdot 1,2^n$ bactérias.

Desejamos saber para que valor de **n** esse número é igual a 100 vezes o número inicial de bactérias, ou seja, desejamos ter:

$$\boxed{\mathbf{x} \cdot 1,2^n = 100\mathbf{x}}$$

Simplificando **x** dos dois lados temos:

$$\boxed{1,2^n = 100}$$

Qual será, então, o valor de **n**? Para responder, vamos escrever os números dessa equação como potências de 10. Já sabemos, do exemplo anterior, que $1,2 = 10^{0,079}$. Portanto, nossa equação fica assim:

$$(10^{0,079})^n = 10$$

$$10^{0,079 \cdot n} = 10$$

Podemos então igualar os expoentes e calcular **n**:

$$0,079 \cdot n = 2$$

$$n = \frac{2}{0,079} = \frac{2.000}{79} @ 25,3$$

Concluímos, então, que, depois de 25 dias e algumas horas (0,3 do dia dá aproximadamente 7 horas), a população de bactérias terá ficado 100 vezes maior.

Os exemplos que vimos até aqui ilustram o que afirmamos no início de nossa aula: ***todo número positivo pode ser escrito como uma potência de 10***. Não mostraremos aqui como obter as potências de 10 correspondentes aos números primos. Elas serão dadas sempre que necessário. Mas, para todos os outros números, o leitor poderá, com auxílio das propriedades das potências, calcular as potências de 10 correspondentes, ou seja, os seus logaritmos. Eles nos ajudarão a resolver problemas práticos mas que envolvem cálculos complicados, como vimos no Exemplo 4 de nossa aula.

Exercício 1.

Consultando nossa aula:

a) Escreva 6 como potência de 10.

b) Qual é o logaritmo de 6?

Exercício 2.

Escreva 21 como potência de 10.

Exercício 3.

Qual é o logaritmo de 40?

Exercício 4.

Complete a tabela de logaritmos, abaixo, transportando os valores que já foram obtidos em nossa aula e calculando os outros.

Números	Logaritmos
1	
2	0,301
3	0,477
4	
5	
6	
7	0,845
8	
9	
10	

Números	Logaritmos
11	1,041
12	
13	1,114
14	
15	
16	
17	1,230
18	
19	1,279
20	

Números	Logaritmos
30	
40	
50	
60	
70	
80	
90	
100	
1000	
10000	

Exercício 5.

Determine, com aproximação até a terceira casa decimal, o valor de **x**, na equação $3^x = 70$.

Sugestão: Escreva os números 3 e 70 como potências de 10, e aplique a propriedade das potências para poder igualar os expoentes.

Exercício 6.

Escreva 560 como potência de 10.

Exercício 7.

Qual é o logaritmo de 420?

Exercício 8.

Qual é o logaritmo de 0,12?

Sugestão: $0{,}12 = \frac{12}{100}$.

Escreva os números 12 e 100 como potências de 10, e aplique a propriedade das potências de mesma base.