AULA

65

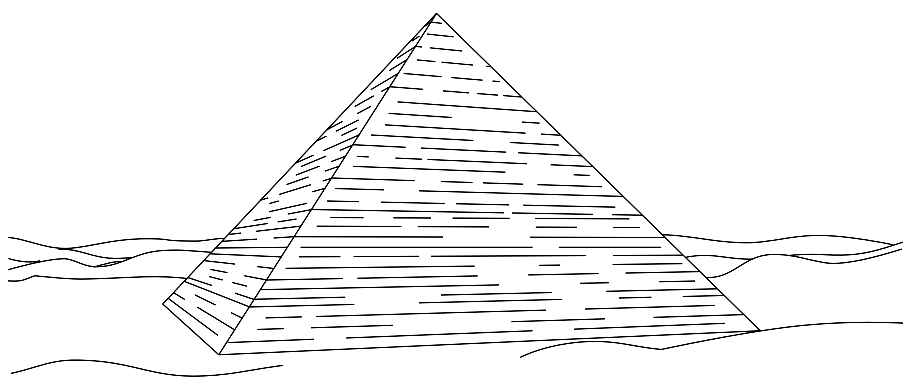
Pirâmide, cone e esfera

Introdução

Dando continuidade à unidade de Geometria Espacial, nesta aula vamos estudar mais três dos sólidos geométricos: a pirâmide, o cone e a esfera.

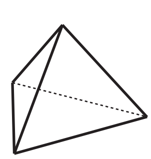
Nossa aula

A pirâmide

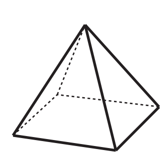


A pirâmide é considerada um dos mais antigos sólidos geométricos construídos pelo homem. Uma das mais famosas é a pirâmide de Quéops, construída em 2.500 a.C., com 150 m de altura, aproximadamente – o que pode ser comparado a um prédio de 50 andares.

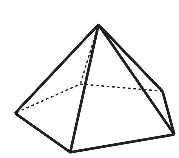
Quando pensamos numa pirâmide, vem-nos à cabeça a imagem da pirâmide egípcia, cuja base é um quadrado. Contudo, o conceito geométrico de pirâmide é um pouco mais amplo: sua base pode ser formada por qualquer polígono. As figuras abaixo representam pirâmides:



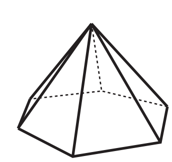
Pirâmide Triângular (tetraedro)



Pirâmide quadrangular



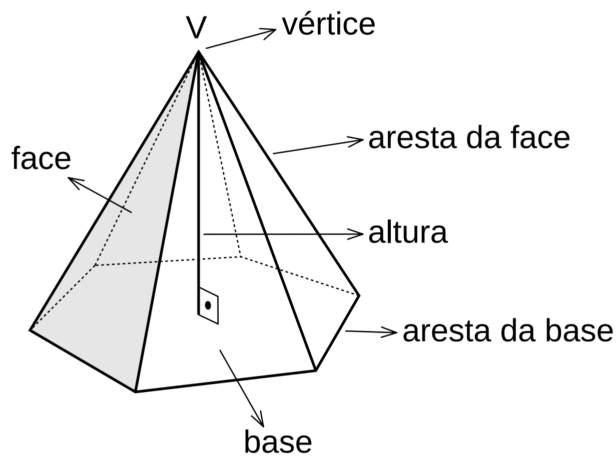
Pirâmide Pentagonal



Pirâmide hexagonal

Algumas definições:

Uma pirâmide é um sólido geométrico, cuja base é um polígono e cujas faces laterais são triângulos que possuem um vértice comum.



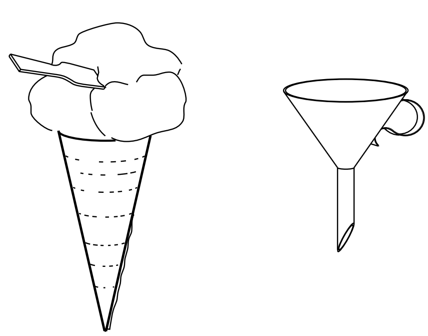
- A altura da pirâmide é um segmento perpendicular à base e que passa por V (vértice).
- Uma pirâmide é regular se a base é um polígono regular e as faces são triângulos iguais. Com isso o pé da altura é o centro do polígono da base, como mostram as figuras abaixo.

Pirâmide Triângular Regular
(a base é um triângulo equilátero)

Pirâmide Quadrangular Regular
(a base é um quadrado)

O cone

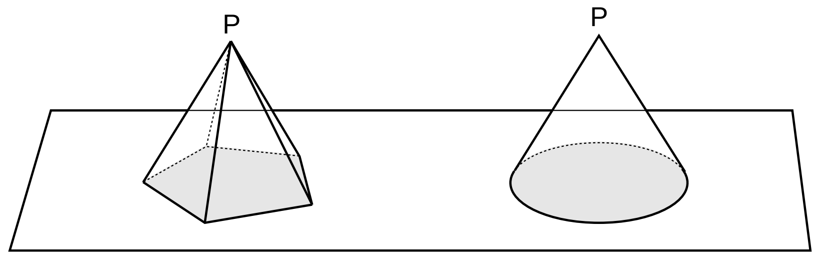
Um funil ou uma casquinha de sorvete dão a idéia do sólido geométrico chamado ***cone***. Um cone (mais precisamente, um cone circular reto) é o sólido obtido da seguinte maneira: tome uma região do plano limitado por uma circunferência e, de um ponto **P** situado exatamente acima do centro da circunferência, trace os segmentos de reta unindo **P** aos pontos da circunferência do círculo.



AULA
65

A pirâmide e o cone

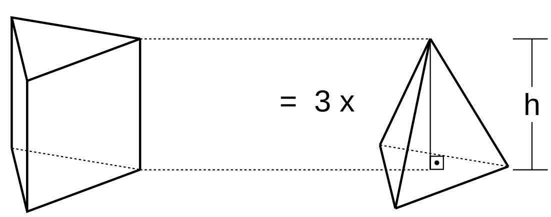
Há muita semelhança entre o cone e a pirâmide. A diferença é que a base do cone é delimitada por um círculo, em vez de um polígono. Ambos podem ser imaginados como um conjunto de segmentos que ligam um ponto P, exterior ao plano, a uma região do plano, como mostra a figura abaixo.



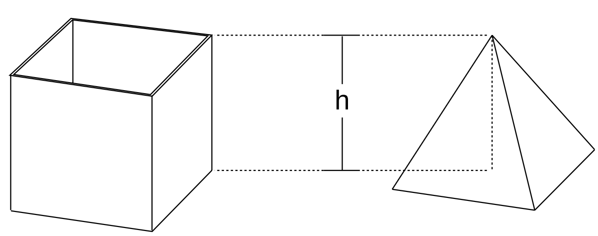
O volume da pirâmide e do cone

Na Aula 63, você viu que o volume do prisma é igual ao produto da sua altura pela área da base.

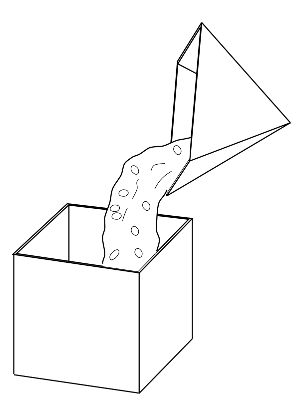
É possível mostrar que, se tivermos um prisma e uma pirâmide de mesma base e mesma altura, o volume do prisma será o triplo do volume da pirâmide.



Você pode comprovar esse fato, experimentalmente. Para isso, basta construir, em cartolina, um prisma e uma pirâmide de mesma base e mesma altura.



Usando areia ou grãos de arroz, encha a pirâmide e despeje seu conteúdo no prisma.

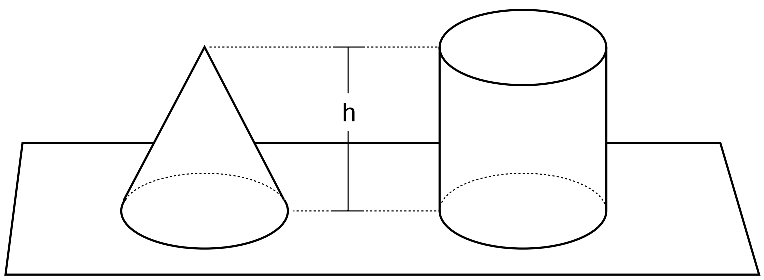


Você vai observar que será necessário despejar cerca de ***três*** vezes o conteúdo da pirâmide no interior do prisma, para enchê-lo por completo.

Com isso, concluímos que o volume da pirâmide é um terço do volume do prisma:

$\boxed{V_{\text{pirâmide}} = \frac{1}{3}\, A \times h}$ onde A representa a área da base e h, sua altura.

Para determinar o volume do cone, podemos proceder de forma análoga. Para isso, construa, em cartolina, um cone e um cilindro de mesma base e mesma altura.



Enchendo o cone com areia, será necessário despejar ***três*** vezes seu conteúdo no interior do cilindro, para enchê-lo.

Portanto, podemos concluir que o volume do cone é a terça parte do volume do cilindro, de mesma base e mesma altura

$\boxed{V_{\text{cone}} = \frac{1}{3}\, A \times h}$ onde A representa a área da base e h, sua altura.

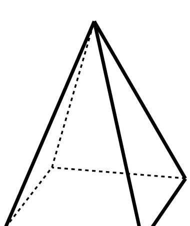
Assim, para toda pirâmide e para todo cone é válida a fórmula:

$$\boxed{V = \frac{A \times h}{3}}$$

Vamos ver alguns exemplos:

EXEMPLO 1

Qual o volume de uma pirâmide quadrangular, cuja altura mede 5 cm e a aresta da base, 3 cm?



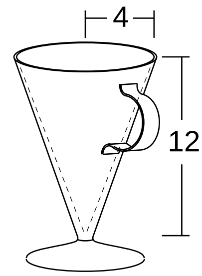
$A_{base} = 3^2 = 9\ cm^2$

$V = \frac{1}{3} \times 9 \times 5 = 15\ cm^3$

O volume dessa pirâmide é de 15 cm^3

EXEMPLO 2

Um copo de caldo de cana, no formato de um cone, tem 8 cm de diâmetro e 12 cm de altura. Qual a capacidade desse copo?

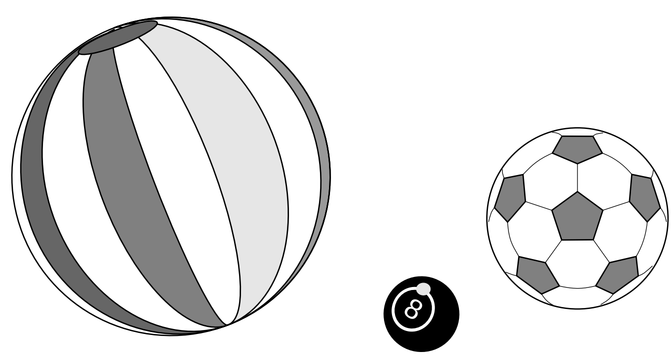


$A_{base} = \pi R^2 = 3{,}14 \times 16 = 50{,}24\ cm^2$

$V = \frac{1}{3} \times 50{,}24 \times 12 = 200{,}96\ cm^3$

Como 1 cm^3 = 1 mℓ, concluímos que a capacidade do copo é de aproximadamente 200 mℓ.

A esfera

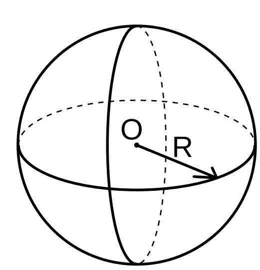


Sem dúvida alguma, a esfera é considerada um dos sólidos mais curiosos que existem, e sua forma tem sido extremamente útil ao homem.

É possível que os homens tenham criado a forma esférica a partir da observação e do estudo dos corpos celestes, como o Sol e a Lua. Ou da verificação de fenômenos como a sombra da Terra projetada sobre a Lua. O formato de nosso planeta foi reproduzido em diversos objetos até chegar às bolas de futebol, vôlei e outros.

Matematicamente, a esfera é o conjunto de todos os pontos do espaço cuja distância a um ponto 0 é igual a uma distância R dada.

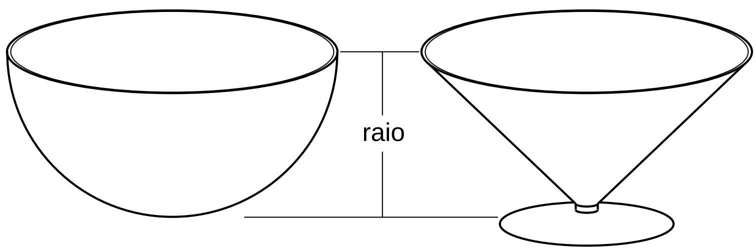
0 $\Rightarrow$ centro da esfera
R $\Rightarrow$ Raio



O volume da esfera

A fórmula que dá o volume da esfera foi demonstrada pelo matemático grego Arquimedes, no século III a.C., em seu livro sobre a esfera e o cilindro.

Usando o método de exaustão, inventado por outro matemático grego chamado Eudoxo, Arquimedes provou que o volume de uma esfera é igual a quatro vezes o volume do cone, cujo raio é o raio da esfera e cuja altura é também o raio da esfera. Para tornar mais clara essa idéia, imagine a experiência que poderia ser feita com as vasilhas da ilustração abaixo. Observe que uma é semi-esférica e a outra é cônica, lembrando uma taça.



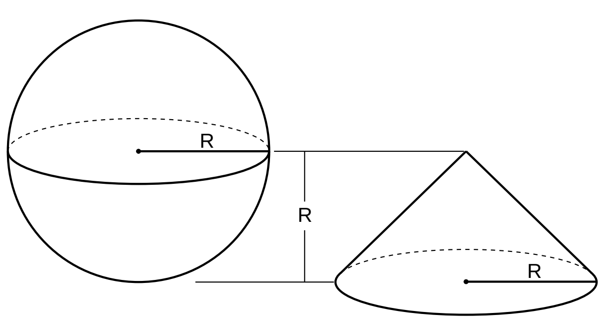
Elas têm a mesma boca, isto é, o raio da semi-esfera é igual ao raio da circunferência do cone. Além disso, elas têm a mesma altura, isto é, a altura do cone é igual ao raio da semi-esfera.

Despejando duas vezes o conteúdo da vasilha cônica no interior da vasilha semi-esférica, conseguimos enchê-la completamente (figura abaixo). Isso significa que a capacidade da semi-esfera é o dobro da capacidade do cone. Portanto, a capacidade da esfera será quatro vezes a capacidade do cone.

Não é fácil fazer essa experiência. Onde encontrar uma vasilha esférica e uma vasilha cônica? Entretanto, pela descrição da experiência, você pode compreender a idéia de Arquimedes. Como dissemos, o grande matemático grego demonstrou, por dedução, que o volume da esfera é quatro vezes o volume do cone, que tem o raio da esfera e cuja altura é o raio da esfera.

Posteriormente, outros matemáticos criaram novos raciocínios para calcular o volume da esfera. Em alguns livros de 2º grau, você pode encontrar uma dedução para a fórmula do volume da esfera.

Vamos retomar a afirmação de Arquimedes. Observe a figura:



$$\text{Volume do cone} = \frac{A ´ h}{3} = \frac{pR^2 ´ R}{3} = \frac{pR^3}{3}$$

Logo, o volume da esfera é: $$V = \frac{4pR^3}{3}$$

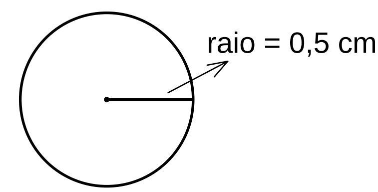
EXEMPLO 3

Qual a quantidade de chumbo necessária para a confecção de 100 bolinhas esféricas, maciças, de 1 cm de diâmetro?

Raio = 0,5 cm

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3} \times 3{,}14 \times (0{,}5)^3 =$$

$$\cong 0{,}523 \text{ cm}^3$$



São necessários 0,523 cm^3, que é o mesmo que 0,523 $m\ell$ de chumbo.

Exercícios

Exercício 1

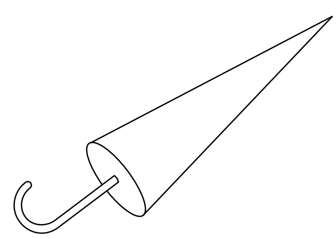
Qual é o volume de uma pirâmide quadrangular de altura 9 cm e cujo perímetro da base é 20 cm?

Exercício 2

Qual é o volume de um cone de 12 cm de altura e com diâmetro da base medindo 10 cm?

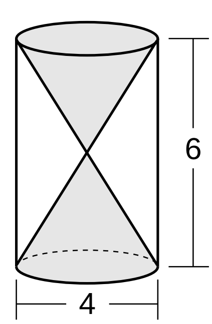
Exercício 3

Qual a quantidade de chocolate necessária para a fabricação de 1.000 pirulitos em forma de guarda-chuva, de 5 cm de altura e 2 cm de diâmetro?



Exercício 4

A ampulheta da figura consiste em dois cones idênticos, dentro de um cilindro. A altura do cilindro é de 6 cm e sua base tem 4 cm de diâmetro.



a) Determine o volume de areia necessário para encher o cone.
b) Determine a quantidade de espaço vazio entre os cones e o cilindro.

Exercício 5

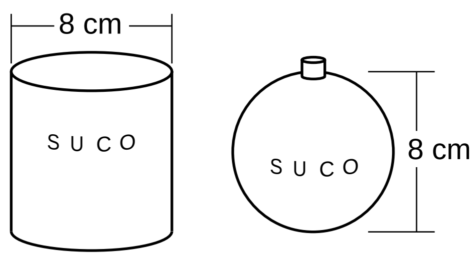
O raio da Terra é de aproximadamente 6.400 km. Considerando que sua forma seja uma esfera, determine o volume do planeta Terra.

Exercício 6

O diâmetro da Lua é, aproximadamente, $\frac{1}{4}$ do da Terra. Determine o volume da Lua.

Exercício 7

Uma fábrica de suco de laranja confeccionou suas embalagens em dois formatos: uma esférica de 8 cm de diâmetro e outra cilíndrica. Sabendo que as duas embalagens têm a mesma altura e a mesma largura, calcule seus volumes.



Exercício 8

Numa indústria química, deseja-se instalar um reservatório esférico para armazenar determinado gás. A capacidade do reservatório deve ser de 33,5 m^3. Qual deve ser, aproximadamente, o raio desse reservatório?