A U L A

67

Problemas de volumes

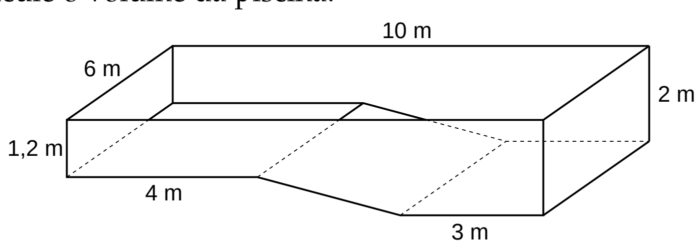
Introdução

Nesta aula, vamos resolver problemas de volumes. Com isso, teremos oportunidade de recordar os principais sólidos: o prisma, o cilindro, a pirâmide, o cone e a esfera.

Nossa aula

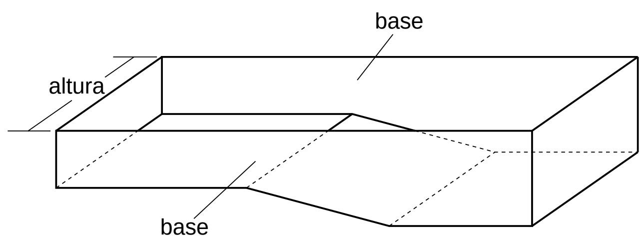
EXEMPLO 1

Na figura abaixo, vemos uma piscina de 10 m de comprimento por 6 m de largura. Existe uma parte rasa, com 1,20 m de profundidade, uma descida e uma parte funda, com 2 m de profundidade. Com as medidas que aparecem no desenho, calcule o volume da piscina.



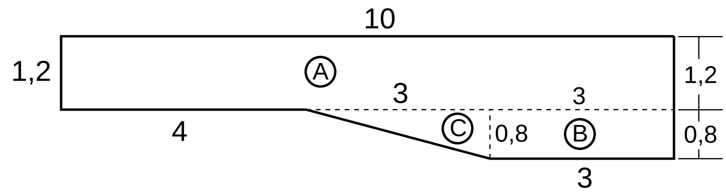
Solução:

Inicialmente, podemos constatar que essa piscina é um ***prisma***. Por quê? Vamos recordar: todo prisma é formado por duas figuras paralelas e iguais chamadas ***bases*** e, por arestas paralelas e iguais, que ligam essas bases. Observe que a nossa piscina está de acordo com essa definição. A figura que aparece na frente é uma das bases e qualquer uma das arestas de comprimento 6 m é a altura, porque elas são perpendiculares às bases.



As duas bases são paralelas e iguais. A altura é perpendicular às bases.

O volume do prisma é igual à área de uma das bases multiplicada pela altura. Como, no nosso caso, a altura é igual a 6 m, só nos falta calcular a área de uma das bases. Para isso, vamos dividi-la em figuras menores, como mostra o desenho abaixo.



A base do nosso prisma foi dividida em três partes: um retângulo (A), um retângulo menor (B) e um triângulo retângulo (C). Com as medidas que estão no desenho, poderemos facilmente calcular as áreas das três partes:

$S_A = 10 \times 1,2 = 12\ m^2$

$S_B = 3 \times 0,8 = 2,4\ m^2$

$S_C = \dfrac{3 \times 0,8}{2} = 1,2\ m^2$

A soma das áreas das três partes é 12 + 2,4 + 1,2 = 15,6 m^2. Essa é a área da base do nosso prisma. Como o volume é o produto da área da base pela altura (6 m), temos que o volume da piscina é:

$$15,6 \times 6 = 93,6\ m^3$$

Concluímos, então, que cabem dentro dessa piscina 93,6 m^3 de água, ou seja, 93 600 litros.

EXEMPLO 2

Na construção de um prédio, para levar a água da cisterna até à caixa superior, foram usados canos de ferro de duas polegadas. Considere os seguintes dados:

Comprimento de um cano = 6 m

Diâmetro externo = 5 cm

Diâmetro interno = 4,4 cm

Densidade do ferro = 7,8 g/cm^3

Quanto pesa um desses canos?

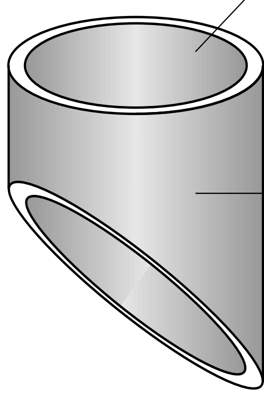
Solução:

Vamos, inicialmente, recordar o significado da palavra ***densidade***. Se um objeto é feito do mesmo material, a densidade desse material é um número que, multiplicado pelo volume desse objeto, dá a sua massa.

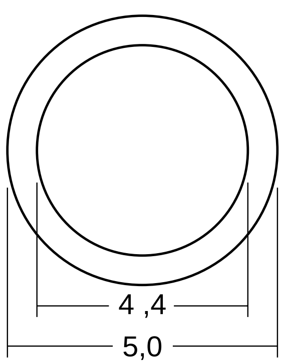
Massa = (densidade) · (volume)

Com o volume em centímetros cúbicos, a massa é dada em gramas. Logo, para determinarmos a massa de um objeto, precisamos saber a densidade do material de que ele é feito e também seu volume. Em nosso caso, temos um cano de ferro cuja densidade é 7,8. Portanto, calculando o volume de ferro, poderemos determinar sua massa.

O cano tem a forma de um ***cilindro***. Mas, como todo cano, ele tem um espaço vazio no interior que também tem a forma de outro cilindro. Logo, o volume de ferro que estamos procurando é a diferença entre os volumes de dois cilindros: um externo, de diâmetro 5,0 cm e um interno, com diâmetro 4,4 cm.



A altura dos dois cilindros é 600 cm, ou seja, o comprimento do cano e seus raios são R = 2,5 cm e r = 2,2 cm.



$$R = \frac{5,0}{2} = 2,5\text{cm}$$

$$r = \frac{4,4}{2} = 2,2\text{cm}$$

Lembrando que o volume de um cilindro é igual à área da base (πR^2) multiplicada pela altura (h), temos:

Volume de ferro = (cilindro externo) – (cilindro interno)

$$= \pi R^2 h - \pi r^2 h$$

$$= 3,14 \times 2,5^2 \times 600 - 3,14 \times 2,2^2 \times 600$$

$$= 2.656,44 \text{ cm}^3$$

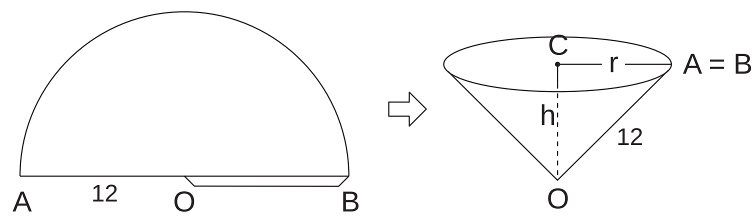
Esse é o volume de ferro que há em um cano. Multiplicando esse valor por 7,8, que é a densidade do ferro, calcularemos sua massa.

Massa do ferro = $7,8 \times 2\,656,44 \cong 20.720$ g = 20,720 kg.

Aí está. Com os dados que apresentamos, calculamos que um cano de ferro de duas polegadas, com 6 metros de comprimento, pesa 20 quilos e 720 gramas, aproximadamente.

EXEMPLO 3

A figura abaixo mostra um semicírculo de papel com 12 cm de raio. Juntando os raios OA e OB fazemos um cone. Qual é o volume desse cone?



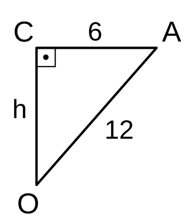
Solução:

Vamos recordar que o perímetro de uma circunferência é igual a $2\pi R$. Logo, o comprimento de metade de uma circunferência é igual a πR. Quando juntamos os pontos A e B do papel, a semicircunferência de raio 12 cm transforma-se em uma circunferência completa de raio r. Temos então:

$$\pi \cdot 12 = 2\pi r$$

ou seja,
$$12 = 2r$$
$$r = 6 \text{ cm}$$

O cone de papel tem, na base, uma circunferência de centro C e raio r = 6 cm. Para calcular a altura do cone, aplicamos o Teorema de Pitágoras, no triângulo OCA:



$$12^2=6^2+h^2$$
$$144=36+h^2$$
$$108=h^2$$
$$h = \sqrt{108} @ 10{,}39 \text{cm}$$

Como o volume do cone é a terça parte do produto da área da base pela altura temos:

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

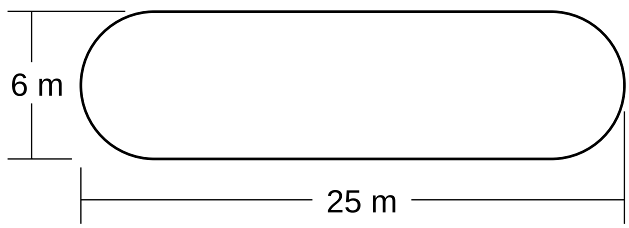
$$V = \frac{1}{3} \times 3{,}14 \times 6^2 \times 10{,}39$$

$$V \cong 391{,}5 \text{ cm}^3$$

Concluímos, então, que, com um semicírculo de papel com 12 cm de raio, conseguimos formar um cone de, aproximadamente, 391,5 cm^3 de volume.

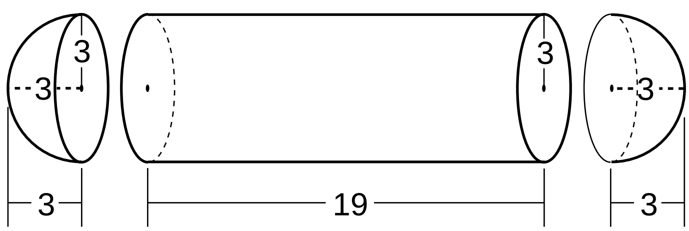
EXEMPLO 4

Um reservatório de gás tem a forma de um cilindro com as extremidades esféricas, como mostra a figura abaixo. Se o comprimento total do reservatório é de 25 m e seu diâmetro é de 6 m, quantos metros cúbicos de gás ele poderá conter?



Solução:

Vamos dividir o reservatório em três partes: uma meia esfera no início, um cilindro no meio e uma outra meia esfera no final. O diâmetro é 6 m, logo, o raio, tanto do cilindro como das meias esferas, é igual a 3 m.



Concluímos, então, que a altura do cilindro (seu comprimento) é igual a $25 - 3 - 3 = 19$ m. Para calcular o volume total, devemos somar os volumes das três partes. Mas, como as duas meias esferas formam juntas uma esfera inteira, temos que:

Volume do reservatório = (cilindro) + (esfera)

Mas, se o volume do cilindro é $\pi R^2 h$ e o da esfera é $\frac{4}{3}\pi R^3$, temos:

Volume do reservatório = $\pi R^2 h + \frac{4}{3}\pi R^3$

$= \pi 3^2 \cdot 19 + \frac{4}{3}\pi 3^3$

$= \pi 3^2 \cdot 19 + 4\pi 3^2$

$= 3{,}14 \cdot 9 \cdot 19 + 4 \cdot 3{,}14 \cdot 9$

$= 536{,}94 + 113{,}04$

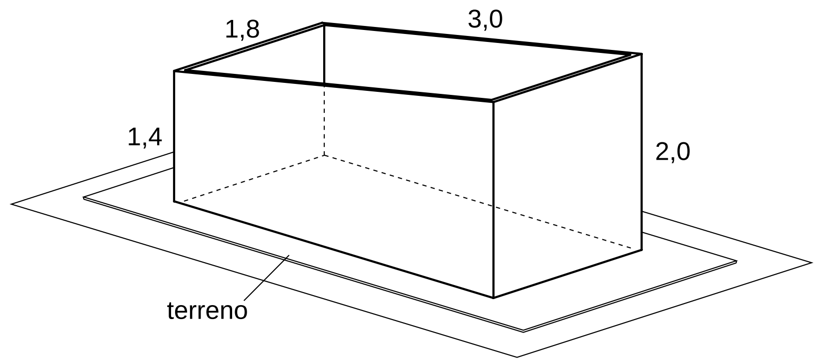
$= 649{,}98 \text{ m}^3$

Concluímos, então, que nesse reservatório cabem, aproximadamente, 650 m^3 de gás.

Exercícios

Exercício 1

Uma cisterna foi feita em terreno inclinado. No final da construção, ela ficou com 3 m de comprimento, 1,8 m de largura, 1,4 m de profundidade, na parte rasa, e 2 m, na parte funda, como mostra o desenho abaixo. Qual é o volume dessa cisterna?



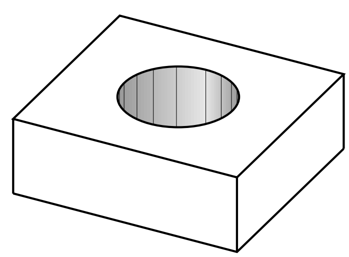
Sugestão: Observe que a cisterna é um prisma. Use o mesmo raciocínio do Exemplo 1 desta aula.

Exercício 2

Uma peça de madeira é um prisma de altura 12 cm, tendo como base um quadrado com 20 cm de lado. No centro da peça, existe um furo cilíndrico de 7 cm de raio.

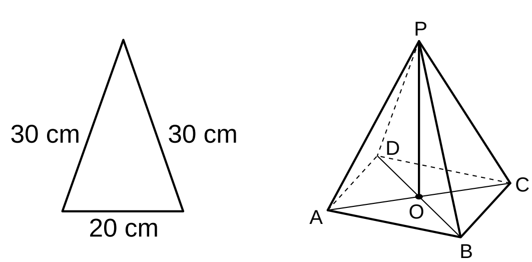
a) Qual é o volume da peça?

b) Se a densidade da madeira é 0,93 g/m^3, quanto pesa essa peça?



Exercício 3

Usando quatro triângulos isósceles iguais ao da figura abaixo, forma-se uma pirâmide de base quadrada. Qual é o volume dessa pirâmide?



Sugestão: A base da pirâmide é o quadrado ABCD de 20 cm de lado. Calcule sua diagonal AC e repare que OA é a metade dessa diagonal. Para calcular a altura PO da pirâmide, use o Teorema de Pitágoras no triângulo AOP.

Exercício 4

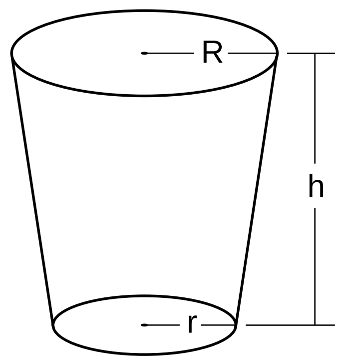
Um feirante, para pesar meio quilo em sua balança de pratos, usa um cilindro de ferro (densidade 7,8) com 4 cm de diâmetro e 5 cm de altura. Verifique se essa peça pesa, realmente, meio quilo.

Exercício 5

Considere o cano de ferro de duas polegadas do Exemplo 2 da nossa aula. Com qual comprimento esse cano pesará 5 kg?

Exercício 6

Um objeto que tem bases circulares e paralelas, mas não do mesmo tamanho, chama-se um tronco de cone.



O volume de um tronco de cone é dado por:

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(R^2 + r^2 + Rr\right)$$

onde **R** e **r** são os raios das duas bases e **h** é sua altura.

Calcule o volume de um recipiente, com a forma de um tronco de cone, sabendo que sua altura mede 16 cm e que suas bases têm diâmetros 8 cm e 6 cm.

Exercício 7

A figura abaixo mostra a peça de uma máquina. Calcule seu volume a partir das medidas em centímetros que aparecem no perfil dessa peça.