AULA

69

Revisão II

Introdução

Nesta segunda parte da revisão, vamos voltar a falar de progressões, funções, juros e prestações. Tente fazer nossos problemas e tenha à mão uma calculadora, para conferir as contas.

Nossa aula

EXEMPLO 1

Para alugar um automóvel, João consultou três agências, e as tarifas cobradas por um dia foram as seguintes:

Agência A: R\$ 80,00, independentemente da quilometragem.

Agência B: R\$ 50,00 mais R\$ 0,20 por quilômetro rodado.

Agência C: R\$ 45,00 mais R\$ 0,25 por quilômetro rodado.

Determinar, em função da quilometragem, qual agência oferece melhor preço para um dia de aluguel.

Sugestão: Considerando **x**, o número de quilômetros rodados e **y** o valor pago pelo aluguel do automóvel, determine a função que relaciona essas variáveis para cada uma das agências.

Solução:

Sejam:

x =	número de quilômetros rodados
y =	preço a pagar

Para a agência A, temos $y = 80$. O preço a pagar não depende da quilometragem e esta é a função constante. Para a agência B, temos $y = 50 + 0,20 \cdot x$, e para a agência C, $y = 45 + 0,25 \cdot x$.

Considerando inicialmente apenas as funções B e C, vamos ver para que valor de **x** elas são iguais.

B ® y = 0,20x + 50
C ® y = 0,25x + 45

$0{,}25x + 45 = 00{,}20x + 500$

$0{,}25x - 0{,}20x = 50 - 45$

$0{,}05x = 5$

$$x = \frac{5}{0{,}05}$$

$x = 100$

Portanto, para um percurso de 100 km, o preço a pagar nas agências B e C será o mesmo: R$ 70,00. Vamos agora verificar para qual quilometragem os preços cobrados por A e B são iguais.

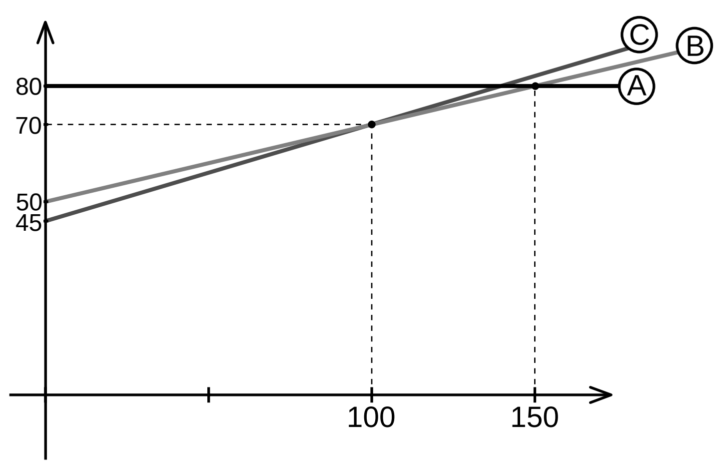
A ® y = 80
B ® y = 0,20x + 50

$0{,}20x + 50 = 80$

$0{,}20x = 30$

$$x = \frac{30}{0{,}20} = 150$$

Portanto, para um percurso de 150 km, o preço a pagar nas agências A e B será o mesmo: R$ 80,00. Já temos, então, informações suficientes para traçar os gráficos das funções.



A observação desses gráficos nos leva às seguintes conclusões: considerando apenas um dia de aluguel, para quilometragens menores que 100 km, a agência C oferece preço mais baixo. Para quilometragens entre 100 e 150 km deve-se preferir a agência B e, para quilometragens acima de 150 km, a agência A é mais vantajosa.

EXEMPLO 2

No dia 20 de junho, Pedro deseja abrir uma caderneta de poupança e fazer um depósito para que, em 20 de dezembro, tenha o suficiente para comprar uma televisão. Se a televisão que ele deseja custa R$ 560,00, se os preços não mudarem e se a poupança render 3% ao mês, de quanto deve ser o depósito inicial de Pedro?

Solução:

Vamos chamar de **x** o depósito de Pedro, no dia 20 de junho. Até 20 de dezembro, são 6 meses.

No dia 20 de julho, Pedro terá na poupança x + 3% de x.

$x + 3\%$ de $x = x + 0{,}03x = x \cdot 1{,}03$

Assim, os saldos da poupança, a cada dia 20, formarão uma ***progressão geométrica*** cujo primeiro termo é $a_1 = x$ e cuja razão é $q = 1{,}03$. O saldo, em dezembro, será o 7º termo dessa progressão. Vamos, então, recordar a fórmula do termo geral da PG que aprendemos na Aula 35.

$$\boxed{a_n = a_1 \cdot q^{n-1}}$$

O saldo em 20 de dezembro será:

$$a_7 = x \cdot 1{,}03^6$$

Para calcular $1{,}03^6$, vamos recordar o uso da máquina de calcular. Digite as teclas na seqüência abaixo:

1 • 0 3 x = = = = = → visor 1,194

Portanto, o saldo em 20 de dezembro será $x \cdot 1{,}194$ que deve ser igual a 560. Logo:

$$x \cdot 1{,}194 = 560$$

$$x = \frac{560}{1{,}194} = 469{,}01$$

Concluímos, então, que se Pedro fizer em 20 de junho um depósito na poupança de R$ 469,01, ele terá, em 20 de dezembro, os R$ 560,00 de que necessita para comprar a televisão.

EXEMPLO 3

Márcio resolveu fazer uma poupança programada e passou a depositar, na caderneta, R$ 100,00 todo primeiro dia de cada mês. Quanto ele terá acumulado logo depois do 20º depósito? Considere que a caderneta de poupança rende 3% ao mês.

Sugestão: Para aumentar uma quantia em 3%, multiplicamos essa quantia por 1,03, como vimos no exemplo anterior. Depois do 20º depósito, repare que o primeiro depósito terá sofrido 19 aumentos; o segundo terá sofrido 18 aumentos, e assim por diante.

Solução:

O 1º depósito sofrerá 19 aumentos de 3%. Cada aumento de 3%, corresponde a uma multiplicação por 1,03. Portanto, o 1º depósito de R$ 100,00, valerá no final de cada período $100 \cdot 1{,}03^{19}$.

O 2º depósito de R$ 100,00, sofrerá 18 aumentos de 3%. Logo, no final do período, ele estará valendo $100 \cdot 1{,}03^{18}$. O raciocínio continua da mesma forma. O penúltimo depósito sofrerá apenas uma correção de 3%, passando a valer $100 \cdot 1{,}03$ e, o último depósito, não sofrerá aumento nenhum.

O saldo na caderneta, após o 20º depósito, será então a soma:

$$\boxed{S = 100 \cdot 1{,}03^{19} + 100 \cdot 1{,}03^{18} + \ldots + 100 \times 1{,}03^{2} + 100 \cdot 1{,}03 + 100}$$

Vamos colocar o valor 100 em evidência e escrever os termos de dentro do parênteses na ordem contrária.

$$S = 100\,(1{,}03^{19} + 1{,}03^{18} + \ldots + 1{,}03^{2} + 1{,}03 + 1)$$

$$S = 100\,(1 + 1{,}03 + 1{,}03^{2} + \ldots + 1{,}03^{18} + 1{,}03^{19})$$

Os termos de dentro do parênteses formam uma ***progressão geométrica***, cujo primeiro termo é $a_1 = 1$ e, cuja razão é $q = 1{,}03$. Vamos recordar, agora, a fórmula da soma dos têrmos da PG que aprendemos na Aula 36.

$$\text{Soma dos termos da PG} = \frac{a_1\left(q^{n} - 1\right)}{q - 1}$$

Assim, como a nossa progressão tem 20 termos, vamos aplicar a fórmula acima substituindo a_1 por 1, q por 1,03 e **n** por 20. O saldo na caderneta será então:

$$S = 100 \times \frac{1\left(1{,}03^{20} - 1\right)}{1{,}03 - 1}$$

Calculando $1{,}03^{20}$, na máquina, de forma semelhante à que fizemos no exemplo anterior, obtemos 1,8061 para essa potência. Então:

$$S = \frac{100\left(1{,}8061 - 1\right)}{0{,}03} = \frac{100 \times 0{,}8061}{0{,}03} = 2687$$

Concluímos, então, que Márcio terá acumulado na poupança, após o 20º depósito, a quantia de R$ 2.687,00.

EXEMPLO 4

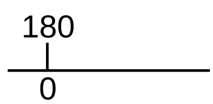
Na loja de Cida, as freguesas gostam de fazer crediário. Cida cobra juros de 10% ao mês e precisa saber calcular corretamente as prestações.

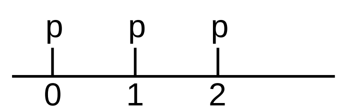
Uma freguesa fez uma compra de R$ 180,00 e pediu para pagar em três parcelas iguais. Uma no ato da compra e as outras duas em 30 e 60 dias. Qual deve ser o valor das parcelas?

Solução:

Vamos utilizar a técnica que aprendemos na Aula 38.

O pagamento à vista de R$ 180,00 deve ser equivalente ao pagamento de três parcelas iguais a **p**, onde estarão sendo cobrados juros de 10% ao mês.





Vamos referir os pagamentos à época 0. No caso do crediário, temos uma parcela na época 0; outra na época 1 e outra na época 2. Portanto, uma das parcelas deve ser dividida por (1 + i) para retroceder um mês, a outra deve ser dividida por $(1 + i)^2$ para retroceder dois meses. Como i = 10% = 0,1 temos:

$$180 = p + \frac{p}{1+0,1} + \frac{p}{(1+0,1)^2}$$ ou

$$180 = p + \frac{p}{1,1} + \frac{p}{1,1^2}$$

Multiplicando tudo por $1,1^2$ temos:

$$180 \cdot 1,1^2 = p \cdot 1,1^2 + p \cdot 1,1 + p$$

$$180 \cdot 1,21 = p\,(1,21 + 1,1 + 1)$$

$$217,8 = p \cdot 3,31$$

$$p = \frac{217,8}{3,31} = 65,80$$

Logo, se a freguesa vai pagar a compra de R$ 180,00 em três parcelas iguais com juros de 10%, cada parcela será de R$ 65,80.