AULA

31

A função do 2º grau

Introdução

Na aula anterior, estudamos a função do 1º grau (**y = ax + b**) e verificamos que seu gráfico é uma reta. Nesta aula, vamos estudar outra função igualmente importante: a função do 2º grau. Ela é representada pela fórmula:

$$\boxed{y = ax^2 + bx + c}$$

onde as letras **a**, **b** e **c** são números conhecidos e **a** é diferente de zero. Veja alguns exemplos de funções do 2º grau:

$$y = 2x^2 - 3 + 4$$
$$y = -3x^2 + 9$$
$$y = x^2$$
$$y = x^2 + 6x$$

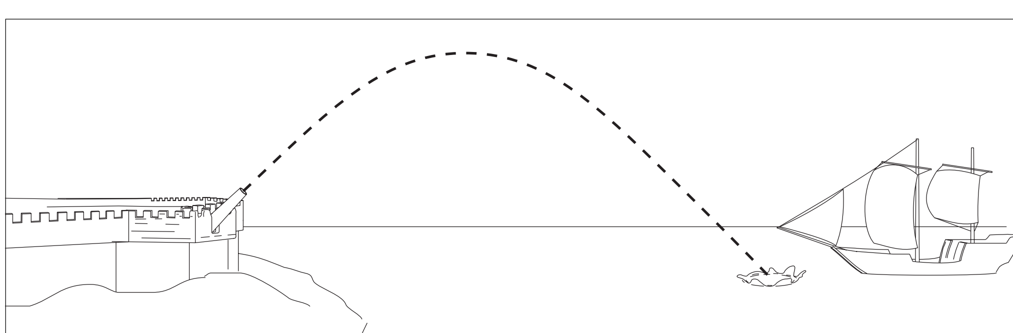
Nossa aula

O objetivo desta aula é investigar os gráficos dessas funções, que são sempre uma curva: a ***parábola***.

Acompanhe os próximos exemplos para ter noção da forma de uma parábola.

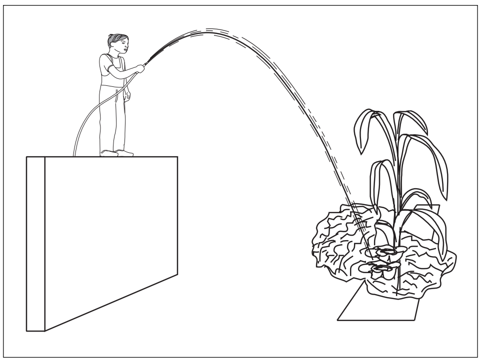
EXEMPLO 1

Imagine um forte antigo, com canhões preparados para atirar em navios inimigos que se aproximassem:



Um navio se aproxima e um canhão dá um tiro. A trajetória da bala segue muito aproximadamente essa curva, chamada ***parábola***. Se não houvesse a resistência do ar, a bala do canhão descreveria exatamente uma parábola.

EXEMPLO 2



Um menino, em cima de um muro, rega as plantas com uma mangueira. Visualizando o jato d'água, você terá uma idéia clara da forma dessa curva.

A parábola

Os exemplos mostraram, aproximadamente, a forma da parábola. Agora, vamos construir uma delas com maior precisão. Escolhemos então a função:

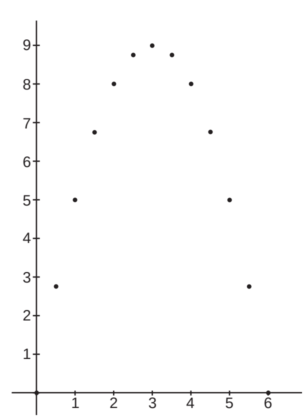
$$y = -x^2 + 6x$$

O ***domínio*** dessa função é o conjunto de todos os números reais. Vamos atribuir a **x** alguns valores e calcular os valores correspondentes de **y**. Observe:

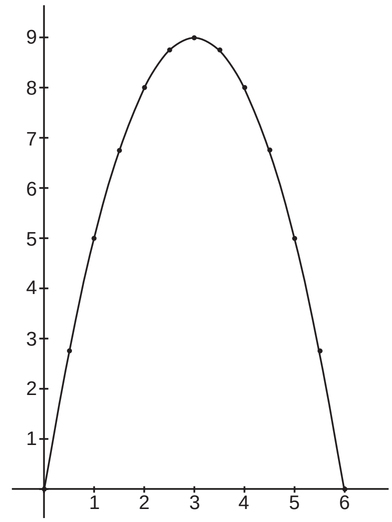
se	$x = 0$	então	$y = -0^2 + 6 . 0 = 0$
se	$x = 0,5$	então	$y = -0,5^2 + 6 . 0,5 = 2,75$
se	$x = 1$	então	$y = -1^2 + 6 . 1 = 5$
se	$x = 1,5$	então	$y = -1,5^2 + 6 . 1,5 = 6,75$

Esse trabalho continua e nos permite organizar uma tabela com diversos pontos. Mostramos abaixo a tabela correspondente a alguns valores de **x** entre 0 e 6 e os valores calculados para **y**. Assinalando no gráfico cartesiano cada um desses pontos, você tem uma primeira idéia do comportamento dessa função. Veja:

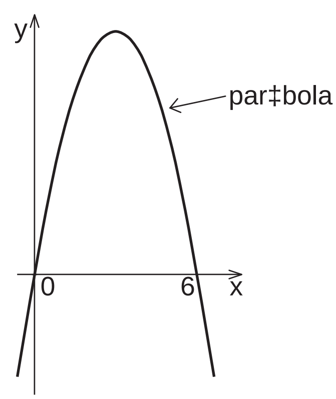
x	y
0	0
0,5	2,75
1	5
1,5	6,75
2	8
2,5	8,75
3	9
3,5	8,75
4	8
4,5	6,75
5	5
5,5	2,75
6	0



Para visualizar melhor o gráfico da função $\mathbf{y = -x^2 + 6x}$, podemos aumentar a nossa tabela para obter mais pontos. O resultado você vê na figura a seguir, que já mostra o gráfico da nossa função entre $\mathbf{x = 0}$ e $\mathbf{x = 6}$.



É bom lembrar que esse desenho é apenas parte do gráfico da nossa função. Para valores de **x** menores que **0** ou maiores que **6** os valores calculados para **y** serão sempre negativos (experimente) e, portanto, o gráfico continuará abaixo do eixo dos **x**. Veja:



A concavidade

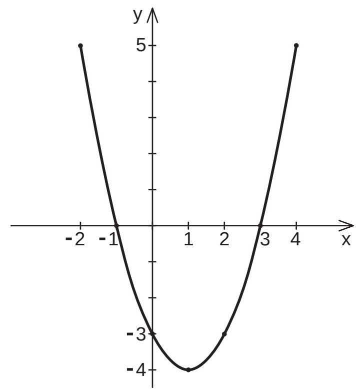
Vamos fazer uma outra experiência para observar a parábola em uma outra posição. Tomemos como exemplo a função:

$$\mathbf{y = x^2 - 2x - 3}$$

Agora, vamos organizar nossa tabela. Atribuímos a **x** valores entre – 2 e 4 e calculamos os valores correspondentes de **y**. Você compreenderá, um pouco mais tarde, a razão da escolha desses valores para **x**.

De qualquer forma, sugerimos que confira nossos cálculos, observe a marcação dos pontos e a construção do gráfico:

x	y
– 2	5
– 1	0
0	– 3
1	– 4
2	– 3
3	0
4	5

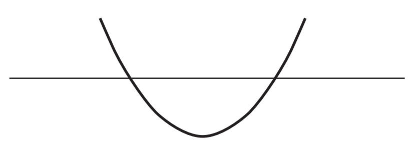


Esse gráfico tem exatamente a mesma forma daquele que encontramos no exemplo anterior, com uma diferença: está em outra posição.

***Dizemos que essa parábola tem* a concavidade voltada para cima, *enquanto a do exemplo anterior tem* a concavidade voltada para baixo.**

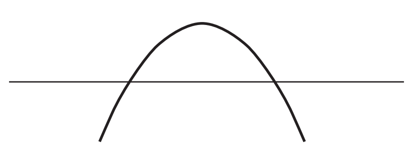
Antes de construir o gráfico da função **$y = ax^2 + bx + c$**, é possível saber como será a sua concavidade. Basta observar o sinal do coeficiente **a:**

- Se **$a > 0$** (**a** positivo), a concavidade estará voltada ***para cima***:



$a > 0$
concavidade
voltada para cima

- Se **$a < 0$** (**a** negativo), a concavidade estará voltada ***para baixo***:



$a < 0$
concavidade
voltada parabaixo

As raízes

As raízes de uma função são os pontos onde seu gráfico corta o eixo dos **x**.
Na função do 2º grau $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$, se $\mathbf{y = 0}$ obtemos a equação $\mathbf{ax^2 + bx + c = 0}$. Podemos, então, ter três casos:

- A equação tem ***duas raízes diferentes***. A parábola, então, corta o eixo dos **x** em dois pontos distintos.

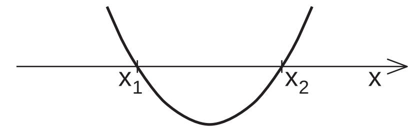


fig A: a fun•‹o
tem duas ra’zes:
x_1 e x_2

- A equação tem apenas ***uma raiz***. A parábola é, então, ***tangente*** ao eixo dos **x**.

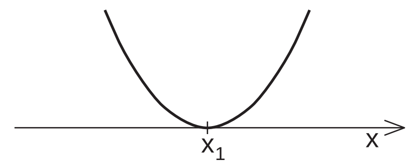


fig B: a fun•‹o
tem uma œnica raiz:
x_1

- A equação ***não tem raiz***. A parábola, então, ***não*** corta o eixo dos **x**.

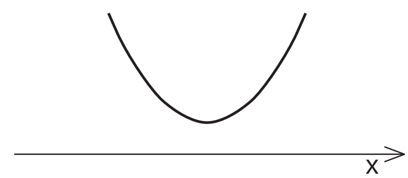


fig C: a fun•‹o
n‹o tem ra’zes.

EXEMPLO 3

Tomemos como exemplo a função:

$$\mathbf{y = x^2 - 6x + 8}$$

Para construir seu gráfico assinalando poucos pontos, devemos inicialmente verificar se a função possui raízes. Vamos então resolver a equação $x \quad - 6x + 8 = 0$ usando a fórmula que aprendemos na Aula 25:

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \,.\, 1 \,.\, 8}}{2 \,.\, 1}$$

$$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 32}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{4}}{2} = \frac{6 \pm 2}{2}$$

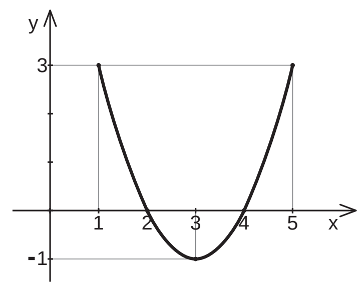
As raízes da nossa função são, portanto:

$$x_1 = \frac{6 - 2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \rightarrow x_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{6 + 2}{2} = \frac{8}{2} = 4 \quad \rightarrow x_2 = 4$$

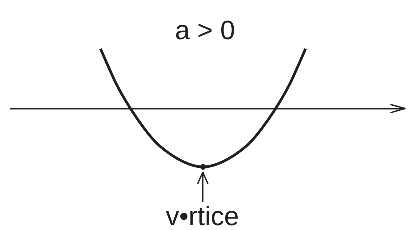
Descobrimos que o gráfico da nossa função corta o eixo dos **x** nos pontos $\mathbf{x_1 = 2}$ e $\mathbf{x_2 = 4}$ e sabemos também que a parábola terá concavidade voltada para cima porque **a = 1** (positivo). Basta, então, para construir a tabela, atribuir a **x** outros valores próximos aos que já temos. É muito importante atribuir a **x** o valor $\frac{x_1 + x_2}{2}$, porque ele fica bem no meio das raízes e vai determinar o ponto ***mais baixo*** da parábola:

	x	y
	1	3
RAÍZES $x_1 =$	2	0
$\frac{x_1 + x_2}{2} =$	3	− 1
RAÍZES $x_2 =$	4	0
	5	3

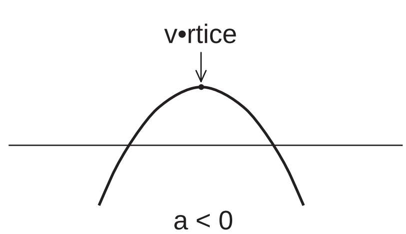


O vértice

No gráfico que acabamos de construir, o ponto V = (3, − 1) é o ***vértice*** da parábola. Ele é o ponto ***mais baixo*** da parábola quando **a > 0**.



No gráfico da função $\mathbf{y = - x^2 + 6x}$, que você viu no início da aula, o ponto (3, 9) é também o ***vértice*** da parábola, que fica no ponto ***mais alto*** do gráfico, porque **a < 0**:



Para a construção do gráfico de uma função do 2º grau, o ***vértice*** é seu ponto mais importante. É possível encontrá-lo de forma bastante simples. Chamando de $\mathbf{x_v}$ a abscissa do vértice da parábola $\mathbf{y = ax^2 + bx + c}$, temos:

$$\boxed{x_v = -\frac{b}{2a}}$$

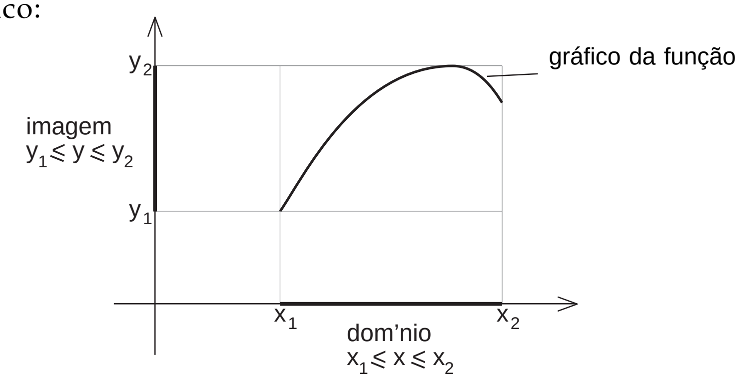
Além disso, se a função possui raízes $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$, podemos encontrar a ***abscissa do vértice*** determinando o seu ponto médio, ou seja:

$$x_v = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

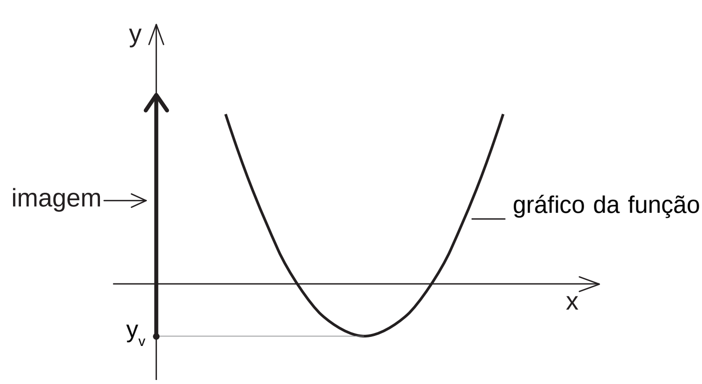
Esses resultados serão demonstrados no **Apêndice**, no final da aula, mas você já pode usá-los para construir de forma rápida e eficiente o gráfico de uma função do 2º grau.

A imagem

Como você já sabe, a ***imagem*** de uma função é o conjunto dos valores de **y** que correspondem aos valores de **x** no domínio. Recorde essa noção observando o gráfico:



Para determinar a imagem de uma função do 2º grau (cujo domínio é o conjunto de todos os números reais), precisamos conhecer seu vértice. Se $\mathbf{a > 0}$, então o vértice é o ponto ***mais baixo*** de seu gráfico, e neste caso, a imagem da função fica assim:



Observando o gráfico anterior e chamando de $\mathbf{y_v}$ a ***ordenada*** do vértice da parábola, a imagem será o conjunto de todos os valores de **y** tais que **y ³ $\mathbf{y_v}$**.

Se $\mathbf{a < 0}$, ocorre o contrário: a concavidade estará voltada para baixo e a imagem será o conjunto dos números reais tais que **y £ $\mathbf{y_v}$**.

EXEMPLO 4

Consideremos a função $y = x^2 - x + 5$.
Sabemos que ela tem concavidade voltada para cima, pois $a = 1$.

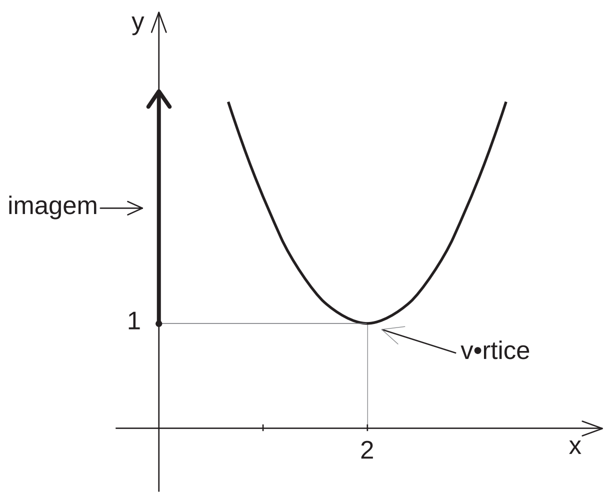
Para fazer um esboço de seu gráfico, determinamos seu vértice. Primeiro, precisamos encontrar sua abscissa:

$$x_v = -\frac{b}{2a} = -\frac{(-4)}{2 \,.\, 1} = 2$$

Substituímos então esse valor de **x** na função para encontrar a ordenada do vértice:

$$y_v = 2^2 - 4 \,.\, 2 + 5 = 1$$

Portanto, o vértice é o ponto (2, 1) e, como a concavidade está voltada para cima, o gráfico tem este aspecto:



A imagem da função é então o conjunto dos valores de **y** tais que $y \geq 1$.

Apêndice

Vamos mostrar agora porque a abscissa do vértice da função do 2º grau é $-\frac{b}{2a}$. Observe as transformações na função: elas criam um quadrado perfeito:

$$y = ax^2 + bx + c$$

$$y = ax^2 + bx + \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{4a} + c$$

$$y = a\left(x^2 + \frac{bx}{a} + \frac{b^2}{4a^2}\right) + c - \frac{b^2}{4a}$$

$$y = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Veja que se **a** é positivo, $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ é sempre positivo ou nulo. Então, para obter o ponto mais ***baixo*** da parábola, fazemos $x+\frac{b}{2a}=0$, ou seja, $x=-\frac{b}{2a}$. Para esse valor de **x**, temos $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$, que é chamado de ***valor mínimo*** da função.

Da mesma forma, se **a** é negativo, $a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2$ é sempre negativo ou nulo. Então, para obter o ponto mais ***alto*** dessa parábola, fazemos $x+\frac{b}{2a}=0$, ou seja, $x=-\frac{b}{2a}$ Para essa valor de x, temos $y=\frac{4ac-b^2}{4a}$ que é chamado de ***valor máximo*** da função.

Se existem raízes $\mathbf{x_1}$ e $\mathbf{x_2}$, a abscissa do vértice da parábola é o valor $\frac{x_1+x_2}{2}$. De fato, representando por D (delta) o número b – 4ac temos:

$$\frac{x_1+x_2}{2}=\frac{1}{2}(x_1+x_2)=\frac{1}{2}\left(\frac{-b-\Delta}{2a}+\frac{-b+\Delta}{2a}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{-b-\sqrt{\Delta}-b+\sqrt{\Delta}}{2a}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{(-2b)}{2a}=$$

$$=-\frac{b}{2a}$$

Portanto, a ***média*** das raízes é também a abscissa do vértice da parábola.

Procure agora fazer os exercícios propostos.

Exercícios

Exercício 1

Faça o gráfico da função y = x .

Sugestão: Organize uma tabela atribuindo a **x** os valores – 2, – 1, 0, 1 e 2.

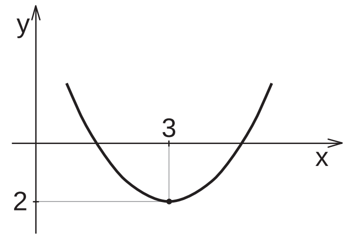
Exercício 2

Observe o exemplo e faça um pequeno esboço do gráfico das funções calculando o vértice da parábola e verificando sua concavidade.

Exemplo:

$$y = x - 6x + 7$$

$$\text{vértice}\quad\begin{cases} x_v = -\dfrac{b}{2a} = -\dfrac{(-6)}{2\,.\,1} = 3 \\ y_v = 3^2 - 6\,.\,3 + 7 = 9 - 18 + 7 = -2 \end{cases}$$



a) $y = x^2 - 4x + 5$

b) $y = - x^2 + 6x - 5$

c) $y = x^2 + 2$

Exercício 3

Faça o gráfico das funções determinando as raízes e o vértice da parábola.

a) $y = x^2 - 4x + 3$

b) $y = - x^2 + 8x - 12$

Exercício 4

Determine as imagens das funções do Exercício 3.

Exercício 5

Faça o gráfico e determine a imagem da função $y = (x - 3)^2$.