AULA

33

Progressões aritméticas

Introdução

Quando escrevemos qualquer quantidade de números, um após o outro, temos o que chamamos de ***seqüência***. As seqüências são, freqüentemente, resultado da observação de um determinado fato ou fenômeno.

Imagine, por exemplo, que uma pessoa da cidade de Magé (Rio de Janeiro) tenha anotado as temperaturas máximas em cada dia do mês de abril de 1995. O resultado pode ser visto na seguinte tabela:

DIA	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	...
TEMPERATURA MÁXIMA (°C)	31	32	32	29	31	34	33	34	26	25	28	27	30	29	...

Na linha de cima, temos a seqüência dos dias e, na de baixo, a seqüência das temperaturas. Nessa seqüência, dizemos que o ***primeiro termo*** é 31, o ***segundo termo*** é 32, o ***sexto termo*** é 34.

É conveniente representar cada termo de uma seqüência pela letra **a**, seguida de um índice que indica a sua ***ordem***.

Assim, na seqüência das temperaturas, temos:

$$a_1 = 31$$
$$a_2 = 32$$
$$a_6 = 34$$
$$a_9 = 26 \text{ etc.}$$

Quando desejamos falar sobre um ***termo qualquer*** de uma seqüência, escrevemos $\mathbf{a_n}$. Assim, no exemplo que acabamos de dar, $\mathbf{a_n}$ ***representa a temperatura máxima registrada no dia*** **n.**

Para que você entenda bem o significado desta última frase, e de outras do mesmo tipo, substitua **n** por números naturais: 1, 2, 3 etc. Fazendo isso, você obtém as seguintes frases:

- $\mathbf{a_1}$ representa a temperatura máxima registrada no dia **1**;
- $\mathbf{a_2}$ representa a temperatura máxima registrada no dia **2**; e assim por diante.

Você pode usar as seqüências para registrar diversas observações, como a produção de uma fábrica em cada mês, o número de telefonemas que você dá por dia, a taxa de inflação mensal etc.

Nesta aula e nas próximas, vamos estudar certas seqüências muito especiais. Por sua regularidade, conhecendo alguns termos, podemos ***calcular*** qualquer outro. A primeira delas chama-se ***progressão aritmética***.

Nossa aula

Uma ***progressão aritmética*** é uma seqüência na qual, dado um primeiro termo, obtemos todos os outros ***acrescentando*** sempre a mesma quantidade. Por exemplo, vamos partir do número 7 e acrescentar 3, diversas vezes:

7 10 13 16 19 22 ...

+3 +3 +3 +3 +3

O valor que ***acrescentamos*** a cada termo para obter o seguinte chama-se ***razão*** (R). Portanto, nesse exemplo, temos:

$$a_1 = 7 \text{ e } R = 3.$$

Veja agora outros exemplos de progressões aritméticas e sua classificação:

- 3, 7, 11, 15, 19, 23 ...
  Temos R = 4.
  É uma ***progressão crescente***.

- 9, 7, 5, 3, 1, - 1, - 3, - 5, ...
  Temos R = - 2.
  É uma ***progressão decrescente***.

- 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, ...
  Temos R = 0.
  É uma ***progressão estacionária***.

Dada uma progressão aritmética, como calculamos sua razão? Pense!

Não é difícil. Como a razão é a quantidade que acrescentamos a cada termo para obter o seguinte, podemos dizer que:

> ***A razão de uma progressão aritmética é a diferença entre qualquer termo e o anterior.***

Assim, retomando os três últimos exemplos, temos:

na 1ª progressão: R = 7 - 3 = 4
R = 11 - 7 = 4
R = 15 - 11 = 4 etc.

na 2ª progressão: R = 7 - 9 = - 2
R = 5 - 7 = - 2 etc.

na 3ª progressão: R = 4 - 4 = 0

Passamos então a generalizar o que vimos nos exemplos. Considere a seguinte progressão aritmética (de agora em diante representada por **PA**) de razão **R**:

$$a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \quad a_6 \quad \dots \; a_n \; \dots$$

$$+R \quad +R \quad +R \quad +R \quad +R \quad +R \quad \dots \quad +R$$

Suponha que você conheça o primeiro termo (a_1), e a razão (R). Como faremos para calcular qualquer outro termo? Observe as igualdades:

$$a_2 = a_1 + R$$
$$a_3 = a_1 + 2R$$
$$a_4 = a_1 + 3R$$
$$a_5 = a_1 + 4R$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{10} = a_1 + 9R$$

Vemos então que, para calcular um termo qualquer (a_n) é preciso somar ao 1º termo, **n - 1** vezes a razão, ou seja:

Fórmula do termo geral

$$\mathbf{a_n = a_1 + (n - 1)\ R}$$

Para entender bem o que estamos fazendo, imagine que você está no 1º degrau de uma escada e deseja chegar ao 10º. Quantos degraus deve subir? É claro que são 9. Se você está no 1º degrau e deseja chegar ao 25º, quantos deve subir? Deve subir 24, lógico. Então, para chegar ao degrau número **n**, devemos subir **n - 1** degraus.

Observe a aplicação dessa fórmula nos exemplos seguintes.

EXEMPLO 1

Qual é o trigésimo (30º) termo da progressão aritmética: 10, 17, 24, 31, 38, ...?

Solução: A razão da progressão é **R = 17 - 10 = 7** e o primeiro termo é $\mathbf{a_1 = 10}$. Desejamos calcular o trigésimo termo, ou seja, $\mathbf{a_{30}}$.

A partir da fórmula do termo geral:

$$a_n = a_1 + (n - 1)R$$

Substituindo a letra **n** por 30, obtemos:

$$a_{30} = a_1 + (30 - 1)R$$

Daí,

$$a_{30} = 10 + 29 \cdot 7$$

$$a_{30} = 213$$

Portanto, o trigésimo termo da progressão dada é **213**.

EXEMPLO 2

Um aluno escreveu todos os números ímpares desde 17 até 63. Quantos números ele escreveu?

Solução: A progressão desse exemplo é a seguinte:

$$17, 19, 21, 23, ..., 63.$$

O primeiro termo é 17, o último termo é 63 e a razão é 2. Escrevemos então:

$$a_1 = 17$$
$$a_n = 63$$
$$R = 2$$

Substituindo esses valores na fórmula do termo geral, calcularemos **n** que é o ***número de termos*** da progressão:

$$a_n = a_1 + (n - 1)R$$
$$63 = 17 + (n - 1) . 2$$
$$63 - 17 = 2n - 2$$
$$46 = 2n - 2$$
$$48 = 2n$$
$$n = 24$$

A progressão tem, portanto, **24 termos**.

EXEMPLO 3

Em janeiro de certo ano, João estava ganhando R$ 70,00 por mês. Seu patrão prometeu aumentar seu salário em R$ 4,00 todos os meses. Quanto João estará ganhando em dezembro do ano seguinte?

Solução: Se o salário de João aumenta R$ 4,00 todos os meses, então a seqüência dos salários é uma progressão aritmética de razão 4.
Vamos organizá-la assim:

1º ANO	janeiro	$\rightarrow$	$a_1 = 70$
	fevereiro	$\rightarrow$	$a_2 = 74$
	....		
	....		
	dezembro	$\rightarrow$	$a_{12} =$
2º ANO	janeiro	$\rightarrow$	$a_{13} =$
	....		
	....		
	dezembro	$\rightarrow$	$a_{24} =$

Usando a fórmula do termo geral, temos:

$$a_{24} = a_1 + 23R$$

$$a_{24} = 70 + 23 \cdot 4$$

$$a_{24} = 70 + 92$$

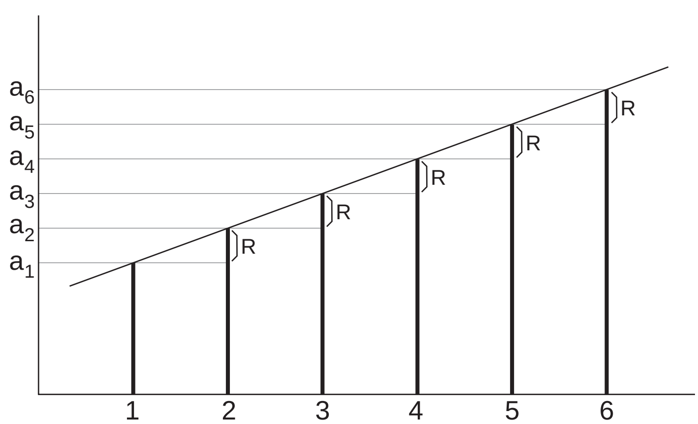
$$a_{24} = 162$$

Portanto, com esses pequenos aumentos mensais, João estará ganhando, em dezembro do ano seguinte, **R$ 162,00**.

Algumas propriedades da progressão aritmética

O gráfico

Podemos visualizar os termos de uma progressão aritmética por meio de um gráfico como este:



Os ***valores dos termos*** são representados pelas barras verticais que formam o desenho de uma escada. Nessa escada, a altura de cada degrau é a ***razão*** da progressão aritmética.

Uma outra fórmula

Se você está no 6º degrau de uma escada e deseja chegar ao 10º, quantos degraus deve subir? A resposta é simples: 4 degraus. Podemos escrever isso em linguagem matemática:

$$\boxed{\mathbf{a_{10} = a_6 + 4R}}$$

De modo geral, se estamos no degrau de número **n** e desejamos chegar ao degrau de número **m**, devemos subir **m - n** degraus. A nossa nova fórmula, que relaciona dois termos quaisquer, é então a seguinte:

$$\boxed{\mathbf{a_m = a_n + (m - n)R}}$$

EXEMPLO 4

Todos os anos, uma fábrica aumenta a produção, em uma quantidade constante. No 5° ano de funcionamento, ela produziu 1.460 peças, e no 8° ano, 1.940. Quantas peças ela produziu no 1° ano de funcionamento?

Se a produção é aumentada a cada ano em uma quantidade constante, temos que a seqüência das produções anuais forma uma progressão aritmética. Nessa progressão, sabemos que $a_5 = 1.460$ e $a_8 = 1.940$. Devemos calcular $\mathbf{a_1}$, ou seja, a produção inicial. Tomemos então nossa última fórmula:

$$a_m = a_n + (m - n)R$$

e façamos **m = 8** e **n = 5**. Ela fica assim:

$$a_8 = a_5 + (8 - 5)R$$

Substituindo os valores conhecidos, temos:

$$1.940 = 1.460 + 3R$$
$$1.940 - 1.460 = 3R$$
$$480 = 3R$$
$$R = 160$$

Sabemos agora que a razão é 160, ou seja, a produção da fábrica aumenta em 160 peças a cada ano. Para calcular o primeiro termo da progressão, façamos **m = 5** e **n = 1** na fórmula que estamos usando. Ela fica assim:

$$a_5 = a_1 + (5 - 1)R \qquad \text{ou}$$

$$a_5 = a_1 + 4R$$

Como os valores de a_5 e R são conhecidos, podemos fazer as substituições:

$$1.460 = a_1 + 4 \cdot 160$$

$$1.460 = a_1 + 640$$

$$1.460 - 640 = a_1$$

$$a_1 = 820$$

Concluímos então que, no primeiro ano de funcionamento, essa fábrica produziu **820 peças**.

Para terminar, repare que temos duas fórmulas, muito parecidas, para relacionar dois termos de uma progressão aritmética e sua razão. A segunda é mais geral. Ela é capaz de calcular qualquer termo de uma PA se você conhece a razão e, também, um outro termo qualquer.

Exercícios

Exercício 1

Calcule o 25º termo da PA: 5, 8, 11, 14, ...

Exercício 2

Uma caixa d’água de 1.000 litros está completamente cheia e vaza 7 litros por hora.

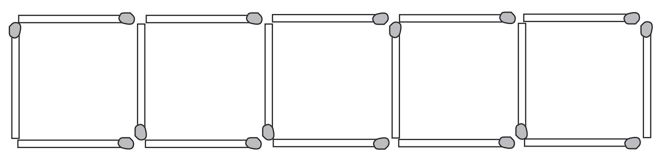
a) Complete alguns termos da progressão sugerida abaixo:

caixa cheia $\rightarrow a_1$ = 1.000 litros
1 hora depois $\rightarrow a_2$ = 993 litros
2 horas depois $\rightarrow a_3$ = ...
3 horas depois $\rightarrow a_4$ = ...
4 horas depois $\rightarrow a_5$ = ...

b) Quantos litros terá a caixa 24 horas depois do instante em que estava cheia?

Exercício 3

Uma criança está brincando de fazer quadrados com palitos de fósforo como mostra o desenho:



Quantos quadrados ela fez com 250 palitos?

Sugestão: Forme uma progressão da seguinte forma:

1 quadrado = 4 palitos $\rightarrow$ $a_1 = 4$
2 quadrados = ... palitos $\rightarrow$ a_2 = ...

Exercício 4

Faça um gráfico mostrando os 6 primeiros termos da progressão aritmética de razão - 3 cujo primeiro termo é 11.

Exercício 5

Em uma PA, $a_{10} = 33$ e $a_{17} = 68$. Calcule a_{32}.

Exercício 6

Um menino tem R$ 19,00 no seu cofre e, a partir de certo mês, passou a tirar R$ 0,80 todos os dias para um sorvete.

a) Organize uma PA mostrando a quantia que resta no cofre após o sorvete diário. Assim:

1º dia $\rightarrow$ a_1 = 18,20
2º dia $\rightarrow$ a_2 = ...
3º dia $\rightarrow$ a_3 = ...
4º dia $\rightarrow$ a_4 = ...
5º dia $\rightarrow$ a_5 = ...

b) Que quantia havia no cofre após o sorvete do 15º dia?

c) Qual foi o 1º dia em que ele não pôde tomar sorvete?

Exercício 7

No acostamento de uma estrada, existem dois telefones para pedidos de socorro mecânico: um no km 51 e outro no km 117. Entre eles, serão colocados mais 10 telefones, de modo que entre um e o seguinte se tenha sempre a mesma distância. Determine em que quilômetros ficarão os novos telefones.

Sugestão: Se já existem 2 telefones e mais 10 serão colocados entre eles, então a progressão terá, ao todo, 12 termos. Considere então $a_1 = 51$ e $a_{12} = 117$. Com a fórmula do termo geral, você pode calcular a razão.