AULA

36

Somando os termos das progressões geométricas

Introdução

Quando estudamos as progressões aritméticas (Aula 34), encontramos uma fórmula bastante prática para calcular a soma de qualquer quantidade de termos. Vamos fazer a mesma coisa nesta aula com as progressões geométricas.

Imagine, por exemplo, a soma:

$$8 + 24 + 72 + 216 + 648 + 1.944 + 5.832 + 17.496 + 52.488$$

As parcelas formam uma progressão geométrica de razão 3, começando em 8. Será possível obter o resultado sem precisar somar todas as parcelas? A resposta é ***sim***, como veremos a seguir.

Nossa aula

Vamos representar por S a soma dos termos de uma progressão geométrica de razão **q**. Para facilitar a compreensão, vamos considerar uma PG com, por exemplo, sete termos. Você perceberá que a dedução da fórmula da soma é exatamente a mesma, qualquer que seja o número de termos. Seja então:

$$S = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \qquad \textbf{(1)}$$

Agora, vamos multiplicar todos os termos dessa igualdade pela razão da PG:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} Sq & = & a_1q & + & a_2q & + & a_3q & + & a_4q & + & a_5q & + & a_6q & + & a_7q \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ Sq & = & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & a_5 & + & a_6 & + & a_7 & + & a_7q \end{array} \qquad \textbf{(2)}$$

Observe que cada termo da PG multiplicado pela razão resulta no próximo, ou seja, $\mathbf{a_1q = a_2}$, $\mathbf{a_2q = a_3}$ e assim por diante.

Em seguida, vamos subtrair as igualdades **(2)** e **(1)**. Veja:

$$\begin{array}{lcccccccccccccccc} Sq & = & & & a_2 & + & a_3 & + & a_4 & + & a_5 & + & a_6 & + & a_7 & + & a_7q \\ -S & = & -a_1 & - & a_2 & - & a_3 & - & a_4 & - & a_5 & - & a_6 & - & a_7 & & \\ \hline Sq - S & = & -a_1 & + & a_7q & & & & & & & & & & & & \end{array}$$

Repare que os outros termos foram cancelados. Como $\mathbf{a_7}$ é igual a $\mathbf{a_1q^6}$, temos:

$$Sq - S = a_1q^6q - a_1$$

Colocando em evidência S do lado esquerdo e $\mathbf{a_1}$ do lado direito encontramos:

$$S(q - 1) = a_1\ (q^7 - 1)$$

ou

$$S = \frac{a_1(q^7 - 1)}{q - 1}$$

Essa fórmula calcula a soma de sete termos de uma PG cujo primeiro termo é $\mathbf{a_1}$ e cuja razão é $\mathbf{q}$. Temos então que, no caso geral, a soma dos $\mathbf{n}$ termos de uma progressão é dada por:

$$\boxed{S = \frac{a_1(q^n - 1)}{q - 1}}$$

EXEMPLO 1

Calcular, com auxílio da fórmula, a soma que apareceu na introdução da aula.

Solução: A soma que você vê na introdução desta aula tem 9 parcelas. Essas parcelas formam uma progressão geométrica com

$$a_1 = 8 \qquad \text{e} \qquad q = \frac{24}{8} = 3$$

Então, fazendo na fórmula as substituições $a_1 = 8$, $q = 3$ e $n = 9$, encontramos:

$$S = \frac{8\ (3^9 - 1)}{3 - 1} \quad \frac{8\ (19.683 - 1)}{2}$$

$$= 4\ .\ 19.682$$

$$= \mathbf{78.728}$$

Aí está o resultado da soma proposta.

Usando a máquina de calcular

Para utilizar a fórmula da soma dos termos de uma progressão geométrica, precisamos calcular o número $\mathbf{q^n}$ que nela aparece. Quando a razão não é um número inteiro ou quando $\mathbf{n}$ é grande, essa conta é trabalhosa. Devemos usar a calculadora da seguinte forma:

$$\boxed{q}\ \boxed{\times}\ \underbrace{\boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \cdots\ \boxed{=}}_{n - 1 \text{ vezes}} \quad \rightarrow \quad q^n$$

Assim, no exemplo anterior, para calcular 3^9, digitamos:

$$\boxed{3}\ \boxed{\times}\ \underbrace{\boxed{=}\ \boxed{=}\ \boxed{=}\ \cdots\ \boxed{=}}_{8 \text{ vezes}} \quad \rightarrow \quad 19.683$$

EXEMPLO 2

Uma indústria iniciou suas atividades produzindo 5.000 objetos por ano e, a cada ano, a produção aumentou em 10% em relação ao ano anterior. Qual foi o total de objetos produzidos em 10 anos de atividade?

Solução: Repare que se, em um ano qualquer, a produção foi de **x** objetos, então, no ano seguinte, será de:

$$x + 10\% \text{ de } x =$$

$$= x + \frac{10}{100} \cdot x =$$

$$= x + 0{,}1 \cdot x =$$

$$= x\,(1 + 0{,}1) =$$

$$= x \cdot 1{,}1$$

Assim, se a produção em um ano é igual à do ano anterior ***multiplicada*** por 1,1, temos que as produções anuais formam uma progressão geométrica de razão 1,1.

$a_1 = 5.000$
$a_2 = 5.000 \cdot 1{,}1$
$a_3 = 5.000 \cdot 1{,}1$
.... etc.

Para calcular o número total de objetos produzidos em 10 anos, usamos nossa fórmula com $a_1 = 5.000$, $q = 1{,}1$ e $n = 10$

$$S = \frac{5.000(1{,}1^{10} - 1)}{1{,}1 - 1}$$

O número $1{,}1^{10}$ é calculado com auxílio da máquina de calcular, como mostramos anteriormente. Lembramos, ainda, que devemos fazer uma ***aproximação*** do resultado que vemos no visor, porque o número de casas decimais já é grande demais. Temos então:

$$S = \frac{5.000(2{,}5937 - 1)}{1{,}1 - 1}$$

$$S = \frac{5.000 \cdot 1{,}5937}{0{,}1}$$

$$S = 79.685$$

Essa indústria produziu, em 10 anos de atividade, aproximadamente **79.690** objetos. Repare que, no cálculo de $1{,}1^{10}$, nossa aproximação foi para ***menos***. Então, o número real de objetos produzidos foi, certamente, um pouco superior ao calculado. Portanto, o número 79.690 é uma ***estimativa***, que sabemos estar próxima da realidade.

EXEMPLO 3

Em certa região do país, a pesca predatória fez com que a produção de pescados caísse em 20% a cada ano. Se, em 1991, foram pescados nessa região 2,5 toneladas de peixe, qual foi a produção total de 1991 até 1995?

Solução: Se a produção em certo ano foi de **x** toneladas, então, no ano seguinte, será 20% menor, ou seja, será:

$$x - 20\% \text{ de } x =$$

$$= \quad x - \frac{20}{100} \cdot x =$$

$$= \quad x - 0{,}2x =$$

$$= \quad x\,(1 - 0{,}2) =$$

$$= \quad x \cdot 0{,}8$$

Logo, se a produção em cada ano é igual à do ano anterior multiplicada por 0,8, temos a seguinte progressão:

$1991 \rightarrow \quad a_1 = 2{,}5$ toneladas

$1992 \rightarrow \quad a_2 = 2{,}5 \cdot 0{,}8$

$1993 \rightarrow \quad a_3 = 2{,}5 \cdot 0{,}8$

$1994 \rightarrow \quad a_4 = 2{,}5 \cdot 0{,}8$

$1995 \quad\quad a_5 = 2{,}5 \cdot 0{,}8^4$

Para somar esses resultados, podemos usar a nossa fórmula:

$$S = \frac{2{,}5(0{,}8^5 - 1)}{o{,}8 - 1} =$$

$$= \frac{2{,}5(0{,}32768 - 1)}{0{,}8 - 1} =$$

$$= \frac{2{,}5(-0{,}67232)}{-0{,}2} =$$

$$= 8{,}404$$

Concluímos então que, nesses 5 anos, foram pescados, aproximadamente, **8,4 toneladas** de peixe.

A PG decrescente

Observe que, quando um número entre 0 e 1 é elevado a potências cada vez maiores, vai sempre diminuindo, como se pode ver no exemplo abaixo:

$$
\begin{aligned}
0{,}4^1 &= 0{,}4 \\
0{,}4^2 &= 0{,}16 \\
0{,}4^3 &= 0{,}064 \\
0{,}4^4 &= 0{,}0256 \\
0{,}4^5 &= 0{,}01024
\end{aligned}
$$

e assim por diante. Os resultados diminuem sempre. Para que você tenha uma idéia da rapidez com que eles diminuem, calculamos $0{,}4^{16}$ e o resultado foi (aproximadamente) 0,000000429. Portanto, quando **q** está entre 0 e 1, as potências de **q** diminuem quando o expoente aumenta. Elas se tornam ***cada vez mais próximas de zero***. Assim, se $\mathbf{0 < q < 1}$, e se o número de termos da PG é muito grande, o termo $\mathbf{q^n}$ que aparece na fórmula é tão pequeno que, na prática, pode ser desprezado. A fórmula então fica assim:

$$S = \frac{a_1\,(q^n - 1)}{q - 1}$$

Retirando o termo q^n, ficamos com:

$$\lim S = \frac{a_1\ (-1)}{q - 1}$$

$$\boxed{\lim S = \frac{a_1}{1 - q}}$$

Esse resultado chama-se ***limite da soma da PG decrescente***. Daí o símbolo **lim S** colocado no lugar de **S**.

Ele fornece um resultado muito próximo da soma dos termos da PG quando o número de parcelas é muito grande.

Quanto maior o número de parcelas, mais a soma ficará próxima de lim S.

Por exemplo, considere a soma:

$$S = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\ldots =$$

As parcelas formam uma PG com $a_1 = 1$ e $q = 0{,}5$.

Se somarmos 20 parcelas, encontraremos como resultado:

$$S = \frac{1(0{,}5\quad - 1)}{0{,}5 - 1} \cong 1{,}999998$$

enquanto que a fórmula do ***limite da soma*** nos diz que:

$$\lim\ S = \frac{1}{1 - 0{,}5} = \frac{1}{0{,}5} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Portanto, quanto maior for o número de parcelas, mais próxima de 2 estará a soma.

Exercícios

Exercício 1

Calcule a soma $S = 1 + 2 + 4 + 8 + ...$, com 10 parcelas.

Exercício 2

Calcule a soma $S = 2 + 10 + 50 + 250 + ...$, com 8 parcelas.

Exercício 3

Calcule a soma $S = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + ...$, com 6 parcelas.

Exercício 4

João ganhou em janeiro R$ 70,00 e, a partir daí, passou a ganhar um aumento de 10% todos os meses. Qual foi o total que ele ganhou em todo esse ano?

Sugestão: Considere a PG formada pelos salários de João:

$$a_1 = 70$$
$$a_2 = 70 \cdot 1,1$$
$$a_3 = 70 \cdot 1,1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$

Use a fórmula da soma para obter o resultado.

Exercício 5

Uma loja de eletrodomésticos vende uma televisão de duas maneiras:

a) à vista por R$ 540,00;

b) pelo "plano maluco", no qual você paga prestações durante toda sua vida, sendo a primeira de R$ 256,00 e cada uma das outras igual à metade da anterior.

Qual delas você deve preferir?

Sugestão: Calcule o limite da soma das prestações do "plano maluco".