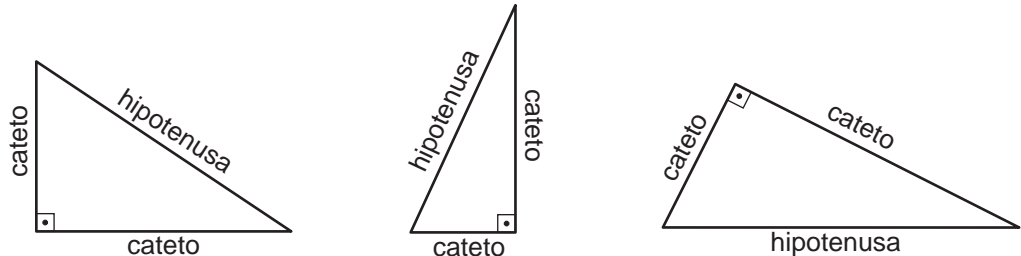


A trigonometria do triângulo retângulo

Introdução

Hoje vamos voltar a estudar os triângulos retângulos. Você já sabe que triângulo retângulo é qualquer triângulo que possua um ângulo reto e que, para este tipo de triângulo, há várias propriedades importantes.



- Dois de seus lados são perpendiculares entre si e são, portanto, alturas do triângulo, o que facilita o *cálculo de sua área*:

$$A = \frac{\text{cateto} \cdot \text{cateto}}{2}$$

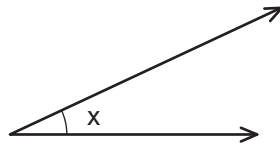
- Teorema de Pitágoras:

$$(\text{hipotenusa})^2 = (\text{cateto})^2 + (\text{cateto})^2$$

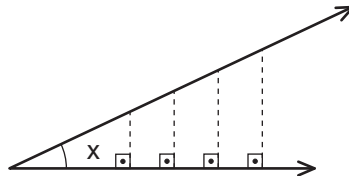
- Como a soma dos ângulos de qualquer triângulo é 180° , num triângulo retângulo um dos ângulos é reto (90°) e os outros dois são sempre *agudos e complementares* (soma = 90°).

Nesta aula, vamos descobrir como podemos estabelecer relações entre os ângulos de um triângulo retângulo (ângulos agudos) e seus lados. “Será que existem tais relações?” É essa nossa primeira preocupação. A seguir, caso existam, serão respondidas perguntas naturais como: “Valem sempre?”; “Como enunciá-las?” etc.

Dado um ângulo agudo qualquer, é possível desenhar um triângulo retângulo?



Sim, podemos desenhar, na verdade, uma infinidade de triângulos retângulos.



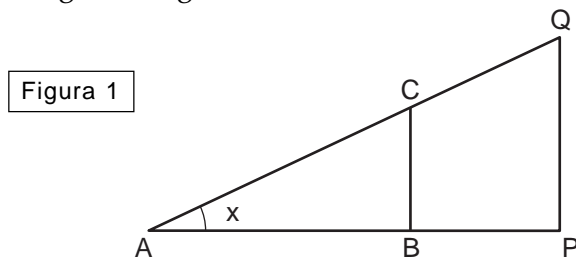
Vamos anotar algumas observações sobre esses triângulos retângulos:

- Para todos eles, um dos ângulos mede x .
- O outro ângulo agudo mede $90^\circ - x$, pois é o complemento de x .
- O terceiro ângulo, como não poderia deixar de ser, é reto.
- Então todos eles possuem os *mesmos ângulos*.
- Lembrando a aula anterior, podemos concluir que: *todos estes triângulos retângulos são semelhantes*
- Se são semelhantes, então *seus lados são proporcionais*.

Podemos então afirmar que, fixado um ângulo agudo, todos os triângulos retângulos, construídos com esse ângulo serão semelhantes e, portanto, terão lados proporcionais. Observe que acabamos de descobrir que há uma relação entre ângulos agudos e lados de um triângulo retângulo.

Precisamos agora verificar como podemos enunciar essa relação mais claramente, usando linguagem matemática.

Observe a figura a seguir:

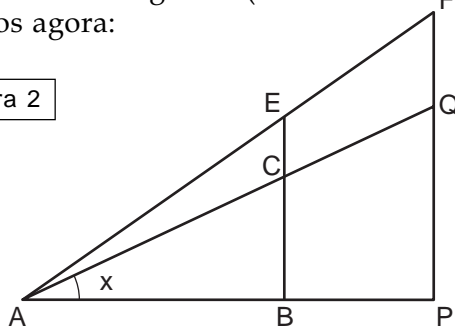


Os triângulos ABC e APQ são semelhantes. Como seus lados são proporcionais, podemos escrever:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AP}{AQ} \text{ ou } \frac{BC}{AC} = \frac{PQ}{AQ} \text{ ou } \frac{BC}{AB} = \frac{PQ}{AP}$$

E se aumentarmos o ângulo x (ou o diminuirmos)? Essas proporções se alteram. Teríamos agora:

Figura 2



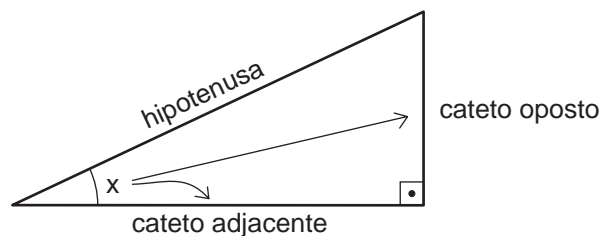
$$\frac{AB}{AE} = \frac{AP}{AQ} \text{ ou } \frac{BE}{AE} = \frac{PQ}{AQ} \text{ ou } \frac{BE}{AB} = \frac{PQ}{AP}$$

Essas proporções – que se alteram conforme o ângulo varia – confirmam nossa suspeita de que há uma relação entre lados e ângulos agudos de um triângulo retângulo. Tais relações recebem nomes especiais como veremos ainda nesta aula.

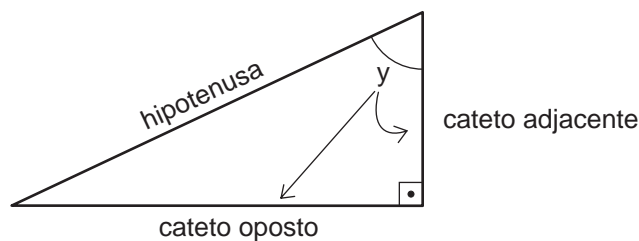
Relacionando lados e ângulos

Você já sabe que, em todo triângulo retângulo, os lados são chamados *hipotenusa* (o maior lado) e *catetos* (lados perpendiculares). Precisamos, em função do ângulo, diferenciar a nomenclatura dos catetos. Veja a figura abaixo.

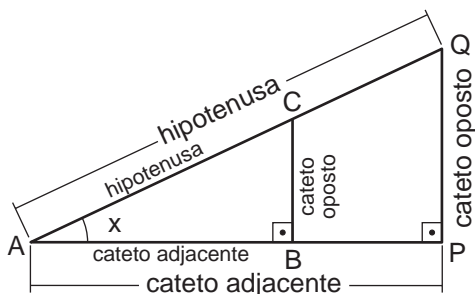
O cateto que fica “em frente” ao ângulo agudo que estamos utilizando chama-se *cateto oposto*, e o cateto que está sobre um dos lados desse ângulo chama-se *cateto adjacente*.



Observe que, se o ângulo do problema for o outro ângulo agudo do triângulo, a nomenclatura *oposto* e *adjacente* troca de posição (veja a figura ao lado), pois depende do ângulo utilizado.



Vamos então reescrever as proporções obtidas na Figura 1 usando essa nomenclatura. Em relação ao ângulo x , temos:



$$\frac{BC}{AC} = \frac{PQ}{AQ} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AP}{AQ} = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

$$\frac{BC}{AB} = \frac{PQ}{AP} = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

Relações trigonométricas

As relações que acabamos de generalizar são chamadas *relações trigonométricas* e recebem nomes especiais.

A primeira é chamada *seno do ângulo x* e escreve-se:

$$\text{sen } x = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{hipotenusa}}$$

A segunda é chamada *co-seno do ângulo x* e escreve-se:

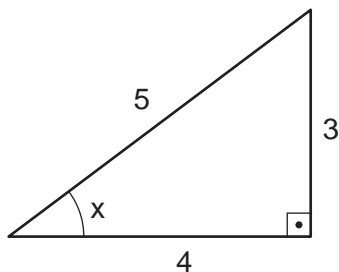
$$\text{cos } x = \frac{\text{cateto adjacente}}{\text{hipotenusa}}$$

A última denomina-se *tangente do ângulo x* e escreve-se:

$$\text{tg } x = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}}$$

EXEMPLO 1

Você já conhece o triângulo pitagórico. Vamos obter as relações trigonométricas para um de seus ângulos agudos.



$$\text{sen } x = \frac{3}{5} = 0,6$$

$$\text{cos } x = \frac{4}{5} = 0,8$$

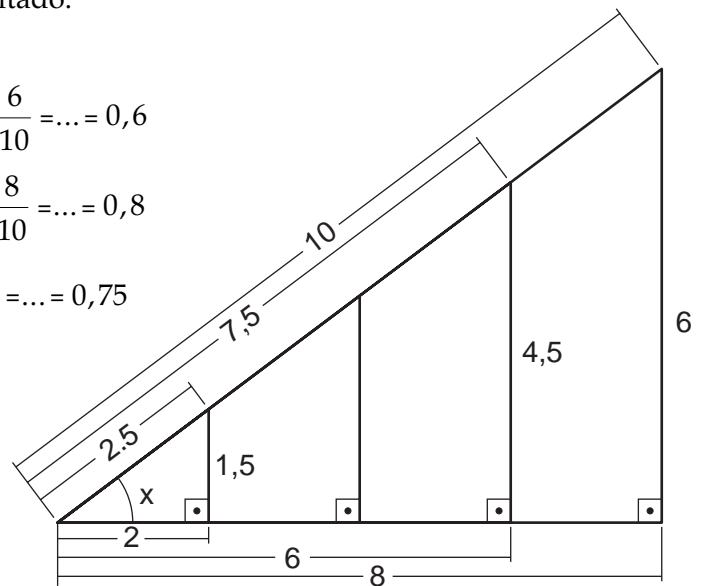
$$\text{tg } x = \frac{3}{4} = 0,75$$

Observe agora que, para qualquer outro triângulo semelhante a este, obtemos o mesmo resultado.

$$\text{sen } x = \frac{1,5}{2,5} = \frac{3}{5} = \frac{4,5}{7,5} = \frac{6}{10} = \dots = 0,6$$

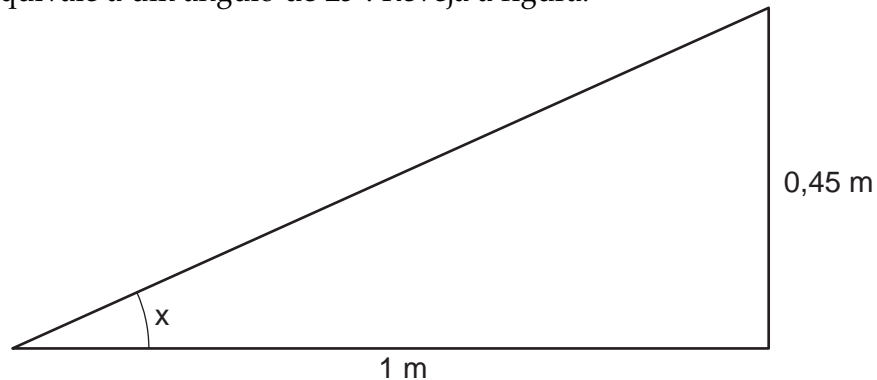
$$\text{cos } x = \frac{2}{2,5} = \frac{4}{5} = \frac{6}{7,5} = \frac{8}{10} = \dots = 0,8$$

$$\text{tg } x = \frac{1,5}{2} = \frac{3}{4} = \frac{4,5}{6} = \frac{6}{8} = \dots = 0,75$$



EXEMPLO 2

Na aula anterior, você viu um exemplo da utilização de ângulos para o cálculo da inclinação do telhado. No caso da utilização de telhas francesas, ficamos sabendo que o telhado poderá ter um caimento de 45%, o que equivale a um ângulo de 25°. Reveja a figura:



Observe que 45% = 0,45 é a tangente do ângulo x , que já sabemos ser igual a 25°. Em linguagem matemática, podemos escrever:

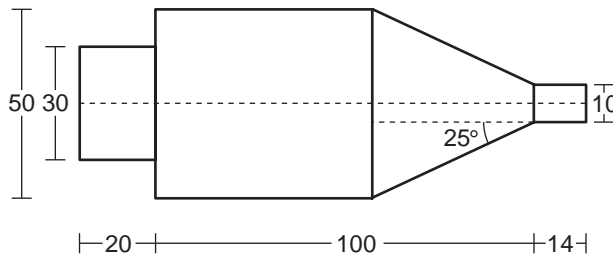
$$\text{tg } x = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} \text{ ou } \text{tg } 25^\circ = \frac{0,45}{1} = 0,45$$

Na realidade, esse é um cálculo aproximado, feito com base na experiência do carpinteiro e conferido por nós com instrumentos de desenho. Mais precisamente teríamos:

$$\text{tg } 25^\circ = 0,46631$$

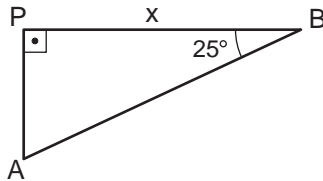
Esse resultado pode ser obtido consultando-se uma tabela trigonométrica como a que reproduzimos no final desta aula.

Um torneiro mecânico precisa moldar uma peça e recebe o projeto a seguir. Todas as medidas necessárias à fabricação constam na figura. No entanto, como saber exatamente onde ele deve começar a fazer a inclinação para obter um ângulo de 25° , como mostra o projeto?

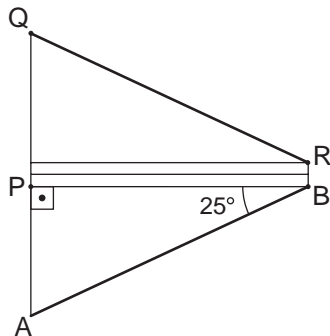


Esse é um exemplo de aplicação da trigonometria dos triângulos retângulos na indústria.

Para resolver o problema, o que precisamos é determinar o cateto x do triângulo retângulo a seguir:



Com os dados do projeto, podemos calcular AP :



$$AQ = 50 \text{ e } BR = 10$$

$$\text{Assim, } AP = \frac{50 - 10}{2} = 20$$

Sendo o ângulo \hat{B} de 25° no triângulo ABP , podemos escrever:

$$\text{tg } 25^\circ = \frac{\text{cateto oposto}}{\text{cateto adjacente}} = \frac{AP}{BP} = \frac{20}{x}$$

No Exemplo 2, vimos que $\text{tg } 25^\circ = 0,46631$. Usando apenas 3 casas decimais, temos:

$$0,466 = \frac{20}{x} \text{ ou } x = \frac{20}{0,466} \cong 43$$

Dessa maneira, o torneiro descobre que o comprimento 100 da figura está dividido em duas partes, uma valendo 43 e a outra 67. Em 67 unidades de comprimento não há inclinação, e nas outras 43 ele deve inclinar a peça de tal maneira que seu final fique com 14 unidades de comprimento.

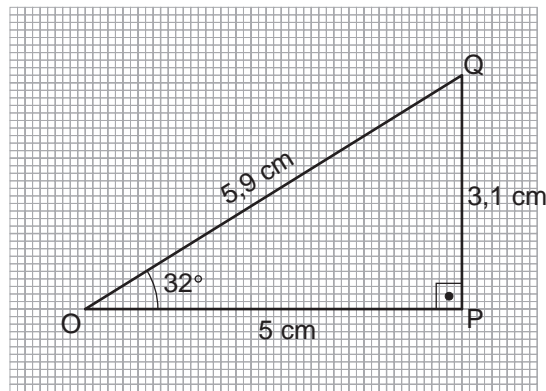
Usando a tabela trigonométrica

Como vimos, para calcular o seno, o co-seno e a tangente de um ângulo agudo, basta desenhar um triângulo retângulo que possua esse ângulo, medir com bastante precisão os seus lados e calcular as razões:

$$\text{sen } x = \frac{\text{cat.op.}}{\text{hip.}} \quad \text{cos } x = \frac{\text{cat.adj.}}{\text{hip.}} \quad \text{tg } x = \frac{\text{cat.op.}}{\text{cat.adj.}}$$

Vejamos como calcularíamos essas razões para um ângulo de 32° .

Vamos utilizar um papel milimetrado (papel quadriculado onde os lados de cada quadradinho medem 1 milímetro = 1 mm) para tentar ser bastante precisos.



Observe que construímos um ângulo de 32° e o triângulo OPQ. Medindo seus lados temos:

$$OP = 50 \text{ mm}, PQ = 31 \text{ mm}, OQ = 59 \text{ mm}$$

$$\text{sen } 32^\circ \cong \frac{31}{59} = 0,52$$

$$\text{cos } 32^\circ \cong \frac{50}{59} = 0,84$$

$$\text{tg } 32^\circ \cong \frac{31}{50} = 0,62$$

No entanto, esses valores, obtidos por processos gráficos, por melhor que seja nosso desenho, apresentam sempre imprecisões. Além disso, seria muito trabalhoso obter os valores de senos, co-senos e tangentes de ângulos graficamente, cada vez que precisássemos desses valores.

Existem processos para calcular senos, co-senos e tangentes com muitas casas decimais exatas. Hoje em dia, muitas calculadoras já trazem teclas com essas funções. Para usá-las, basta digitar a medida do ângulo e depois a tecla correspondente à função desejada.

Outro recurso muito utilizado é consultar uma *tabela trigonométrica*, como a que consta no final desta aula.

Nessa tabela, podemos encontrar os valores de seno, co-seno e tangente com uma aproximação de 5 casas decimais para todos os ângulos com medidas inteiras entre 1° e 90° , de 10 em 10 minutos.

Minutos (') e segundos (") são subdivisões do grau, dando mais precisão às medidas dos ângulos..

Consulte a tabela e confirme que:

$$\text{sen } 41^\circ = 0,65606$$

$$\text{cos } 41^\circ = 0,75471$$

$$\text{tg } 41^\circ = 0,86929$$

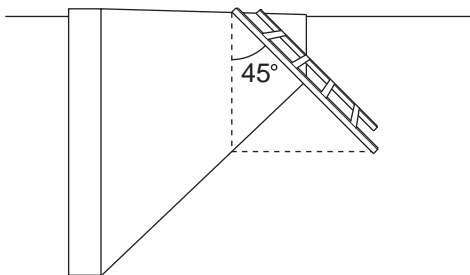
$$\text{sen } 80^\circ = 0,98481$$

$$\text{cos } 80^\circ = 0,17365$$

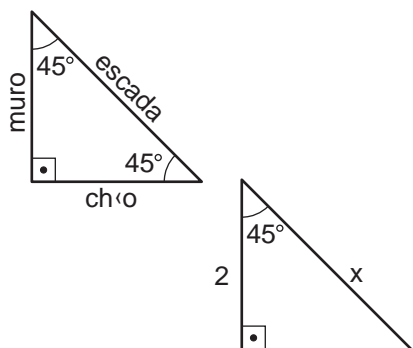
$$\text{tg } 80^\circ = 5,67128$$

EXEMPLO 4

Uma escada está apoiada em um muro de 2 m de altura, formando um ângulo de 45° . Forma-se, portanto, um triângulo retângulo isósceles. Qual é o comprimento da escada?



Representando a vista lateral geometricamente, podemos construir o triângulo retângulo a seguir:



Usando o co-seno do ângulo de 45° que a escada forma com o muro, descobrimos o valor de x , que será o comprimento da escada.

$$\text{cos } 45^\circ = \frac{2}{x}$$

$$0,707 \cdot x = 2 \rightarrow x \cong 2,83$$

Exercício 1

Consulte a tabela trigonométrica e dê os valores de:

a) $\text{sen } 52^\circ$, $\text{cos } 52^\circ$, $\text{tg } 52^\circ$

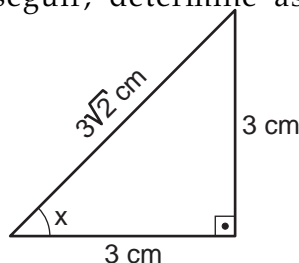
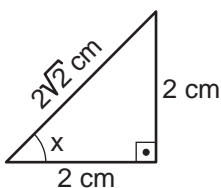
b) $\text{sen } 38^\circ$, $\text{cos } 38^\circ$, $\text{tg } 38^\circ$

c) $\text{sen } 20^\circ$ e $\text{cos } 70^\circ$

d) $\text{sen } 70^\circ$ e $\text{cos } 20^\circ$

Exercício 2

Usando os triângulos retângulos a seguir, determine as razões trigonométricas para o ângulo x .



Exercícios

Exercício 3

No Exercício 2, o que podemos concluir sobre o ângulo x ? Quanto mede esse ângulo?

Exercício 4

Com auxílio da tabela e dos exercícios anteriores, responda:

- A tangente de um ângulo agudo pode ser igual a 1?
Em caso afirmativo, para que ângulo isso acontece?
- A tangente de um ângulo agudo pode ser maior do que 1?
Em caso afirmativo, para que ângulos isso acontece?

Exercício 5

Nos itens (c) e (d) do Exercício 1, você encontrou na tabela o seno e o co-seno dos ângulos 20° e 70° , que são ângulos complementares ($20^\circ + 70^\circ = 90^\circ$). Encontre na tabela os valores de seno e co-seno de outros ângulos complementares como: 30° e 60° , 40° e 50° ... O que podemos concluir a partir da observação desses valores?

Exercício 6

- Com os valores que você anotou no Exercício 5, calcule, agora com o auxílio da máquina de calcular, o valor das frações:

$$\frac{\text{sen } 20^\circ}{\text{cos } 20^\circ} \quad \frac{\text{sen } 70^\circ}{\text{cos } 70^\circ} \quad \frac{\text{sen } 52^\circ}{\text{cos } 52^\circ} \quad \frac{\text{sen } 38^\circ}{\text{cos } 38^\circ}$$

- Comparando esses resultados com o valor da tangente desses ângulos, o que podemos concluir?

Tabelas trigonométricas

TABELA DE SENOS

0° - 45°

<i>minutos</i> <i>graus</i>	0	10	20	30	40	50
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01454
1	0,01745	0,02036	0,02327	0,02618	0,02908	0,03199
2	0,03490	0,03781	0,04071	0,04362	0,04653	0,04943
3	0,05234	0,05524	0,05814	0,06105	0,06395	0,06685
4	0,06976	0,07266	0,07556	0,07846	0,08136	0,08426
5	0,08716	0,09005	0,09295	0,09585	0,09874	0,10164
6	0,10453	0,10742	0,11031	0,11320	0,11609	0,11898
7	0,12187	0,12476	0,12764	0,13053	0,13341	0,13629
8	0,13917	0,14205	0,14493	0,14781	0,15069	0,15356
9	0,15643	0,15931	0,16218	0,16505	0,16792	0,17078
10	0,17365	0,17651	0,17937	0,18224	0,18509	0,18795
11	0,19081	0,19366	0,19652	0,19937	0,20222	0,20507
12	0,20791	0,21076	0,21360	0,21644	0,21928	0,22212
13	0,22495	0,22778	0,23062	0,23345	0,23627	0,23910
14	0,24192	0,24474	0,24756	0,25038	0,25320	0,25601
15	0,25882	0,26163	0,26443	0,26724	0,27004	0,27284
16	0,27564	0,27843	0,28123	0,28402	0,28680	0,28959
17	0,29237	0,29515	0,29793	0,30071	0,30348	0,30625
18	0,30902	0,31178	0,31454	0,31730	0,32006	0,32282
19	0,32557	0,32832	0,33106	0,33381	0,33655	0,33929
20	0,34202	0,34475	0,34748	0,35021	0,35293	0,35565
21	0,35837	0,36108	0,36379	0,36650	0,36921	0,37191
22	0,37461	0,37730	0,37999	0,38268	0,38537	0,38805
23	0,39073	0,39341	0,39608	0,39875	0,40142	0,40408
24	0,40674	0,40939	0,41204	0,41469	0,41734	0,41998
25	0,42262	0,42525	0,42788	0,43051	0,43313	0,43575
26	0,43837	0,44098	0,44359	0,44620	0,44880	0,45140
27	0,45399	0,45658	0,45917	0,46175	0,46433	0,46690
28	0,46947	0,47204	0,47460	0,47716	0,47971	0,48226
29	0,48481	0,48735	0,48989	0,49242	0,49495	0,49748
30	0,50000	0,50252	0,50503	0,50754	0,51004	0,51254
31	0,51504	0,51753	0,52002	0,52250	0,52498	0,52745
32	0,52992	0,53238	0,53484	0,53730	0,53975	0,54220
33	0,54464	0,54708	0,54951	0,55194	0,55436	0,55678
34	0,55919	0,56160	0,56401	0,56641	0,56880	0,57119
35	0,57358	0,57596	0,57833	0,58070	0,58307	0,58543
36	0,58779	0,59014	0,59248	0,59482	0,59716	0,59949
37	0,60182	0,60414	0,60645	0,60876	0,61107	0,61337
38	0,61566	0,61795	0,62024	0,62251	0,62479	0,62706
39	0,62932	0,63158	0,63383	0,63608	0,63832	0,64056
40	0,64279	0,64501	0,64723	0,64945	0,65166	0,65386
41	0,65606	0,65825	0,66044	0,66262	0,66480	0,66697
42	0,66913	0,67129	0,67344	0,67559	0,67773	0,67987
43	0,68200	0,68412	0,68624	0,68835	0,69046	0,69256
44	0,69466	0,69675	0,69883	0,70091	0,70298	0,70505
45	0,70711	0,70916	0,71121	0,71325	0,71529	0,71732

TABELA DE SENOS
45° - 90°

minutos graus	0	10	20	30	40	50
45	0,70711	0,70916	0,71121	0,71325	0,71529	0,71732
46	0,71934	0,72136	0,72337	0,72537	0,72737	0,72937
47	0,73135	0,73333	0,73531	0,73728	0,73924	0,74120
48	0,74314	0,74509	0,74703	0,74896	0,75088	0,75280
49	0,75471	0,75661	0,75851	0,76041	0,76229	0,76417
50	0,76604	0,76791	0,76977	0,77162	0,77347	0,77531
51	0,77715	0,77897	0,78079	0,78261	0,78442	0,78622
52	0,78801	0,78980	0,79158	0,79335	0,79512	0,79688
53	0,79864	0,80038	0,80212	0,80386	0,80558	0,80730
54	0,80902	0,81072	0,81242	0,81412	0,81580	0,81748
55	0,81915	0,82082	0,82248	0,82413	0,82577	0,82741
56	0,82904	0,83066	0,83228	0,83389	0,83549	0,83708
57	0,83867	0,84025	0,84182	0,84339	0,84495	0,84650
58	0,84805	0,84959	0,85112	0,85264	0,85416	0,85567
59	0,85717	0,85866	0,86015	0,86163	0,86310	0,86457
60	0,86603	0,86748	0,86892	0,87036	0,87178	0,87321
61	0,87462	0,87603	0,87743	0,87882	0,88020	0,88158
62	0,88295	0,88431	0,88566	0,88701	0,88835	0,88968
63	0,89101	0,89232	0,89363	0,89493	0,89623	0,89752
64	0,89879	0,90007	0,90133	0,90259	0,90383	0,90507
65	0,90631	0,90753	0,90875	0,90996	0,91116	0,91236
66	0,91355	0,91472	0,91590	0,91706	0,91822	0,91936
67	0,92050	0,92164	0,92276	0,92388	0,92499	0,92609
68	0,92718	0,92827	0,92935	0,93042	0,93148	0,93252
69	0,93358	0,93462	0,93565	0,93667	0,93769	0,93869
70	0,93969	0,94068	0,94167	0,94264	0,94361	0,94457
71	0,94552	0,94646	0,94740	0,94832	0,94924	0,95015
72	0,95106	0,95195	0,95284	0,95372	0,95459	0,95545
73	0,95630	0,95715	0,95799	0,95882	0,95964	0,96046
74	0,96126	0,96206	0,96285	0,96363	0,96440	0,96517
75	0,96593	0,96667	0,96742	0,96815	0,96887	0,96959
76	0,97030	0,97100	0,97169	0,97237	0,97304	0,97371
77	0,97437	0,97502	0,97566	0,97630	0,97692	0,97754
78	0,97815	0,97875	0,97934	0,97992	0,98050	0,98107
79	0,98163	0,98218	0,98272	0,98325	0,98378	0,98430
80	0,98481	0,98531	0,98580	0,98629	0,98676	0,98723
81	0,98769	0,98814	0,98858	0,98902	0,98944	0,98986
82	0,99027	0,99067	0,99106	0,99144	0,99182	0,99219
83	0,99255	0,99290	0,99324	0,99357	0,99390	0,99421
84	0,99452	0,99482	0,99511	0,99540	0,99567	0,99594
85	0,99619	0,99644	0,99668	0,99692	0,99714	0,99736
86	0,99756	0,99776	0,99795	0,99813	0,99831	0,99847
87	0,99863	0,99878	0,99892	0,99905	0,99917	0,99929
88	0,99939	0,99949	0,99958	0,99966	0,99973	0,99979
89	0,99985	0,99989	0,99993	0,99996	0,99998	0,99999
90	1,00000	-	-	-	-	-

TABELA DE CO-SENOS
0° - 45°

minutos graus	0	10	20	30	40	50
0	1,00000	0,99999	0,99998	0,99996	0,99993	0,99989
1	0,99985	0,99979	0,99973	0,99966	0,99958	0,99949
2	0,99939	0,99929	0,99917	0,99905	0,99892	0,99878
3	0,99863	0,99847	0,99831	0,99813	0,99795	0,99776
4	0,99756	0,99736	0,99714	0,99692	0,99668	0,99644
5	0,99619	0,99594	0,99567	0,99540	0,99511	0,99482
6	0,99452	0,99421	0,99390	0,99357	0,99324	0,99290
7	0,99255	0,99219	0,99182	0,99144	0,99106	0,99067
8	0,99027	0,98986	0,98944	0,98902	0,98858	0,98814
9	0,98769	0,98723	0,98676	0,98629	0,98580	0,98531
10	0,98481	0,98430	0,98378	0,98325	0,98272	0,98218
11	0,98163	0,98107	0,98050	0,97992	0,97934	0,97875
12	0,97815	0,97754	0,97692	0,97630	0,97566	0,97502
13	0,97437	0,97371	0,97304	0,97237	0,97169	0,97100
14	0,97030	0,96959	0,96887	0,96815	0,96742	0,96667
15	0,96593	0,96517	0,96440	0,96363	0,96285	0,96206
16	0,96126	0,96046	0,95964	0,95882	0,95799	0,95715
17	0,95630	0,95545	0,95459	0,95372	0,95284	0,95195
18	0,95106	0,95015	0,94924	0,94832	0,94740	0,94646
19	0,94552	0,94457	0,94361	0,94264	0,94167	0,94068
20	0,93969	0,93869	0,93769	0,93667	0,93565	0,93462
21	0,93358	0,93252	0,93148	0,93042	0,92935	0,92827
22	0,92718	0,92609	0,92499	0,92388	0,92276	0,92164
23	0,92050	0,91936	0,91822	0,91706	0,91590	0,91472
24	0,91355	0,91236	0,91116	0,90996	0,90875	0,90753
25	0,90631	0,90507	0,90383	0,90259	0,90133	0,90007
26	0,89879	0,89752	0,89623	0,89493	0,89363	0,89232
27	0,89101	0,88968	0,88835	0,88701	0,88566	0,88431
28	0,88295	0,88158	0,88020	0,87882	0,87743	0,87603
29	0,87462	0,87321	0,87178	0,87036	0,86892	0,86748
30	0,86603	0,86457	0,86310	0,86163	0,86015	0,85866
31	0,85717	0,85567	0,85416	0,85264	0,85112	0,84959
32	0,84805	0,84650	0,84495	0,84339	0,84182	0,84025
33	0,83867	0,83708	0,83549	0,83389	0,83228	0,83066
34	0,82904	0,82741	0,82577	0,82413	0,82248	0,82082
35	0,81915	0,81748	0,81580	0,81412	0,81242	0,81072
36	0,80902	0,80730	0,80558	0,80386	0,80212	0,80038
37	0,79864	0,79688	0,79512	0,79335	0,79158	0,78980
38	0,78801	0,78622	0,78442	0,78261	0,78079	0,77897
39	0,77715	0,77531	0,77347	0,77162	0,76977	0,76791
40	0,76604	0,76417	0,76229	0,76041	0,75851	0,75661
41	0,75471	0,75280	0,75088	0,74896	0,74703	0,74509
42	0,74314	0,74120	0,73924	0,73728	0,73531	0,73333
43	0,73135	0,72937	0,72737	0,72537	0,72337	0,72136
44	0,71934	0,71732	0,71529	0,71325	0,71121	0,70916
45	0,70711	0,70505	0,70298	0,70091	0,69883	0,69675

TABELA DE CO-SENOS
45° - 90°

minutos graus	0	10	20	30	40	50
45	0,70711	0,70505	0,70298	0,70091	0,69883	0,69675
46	0,69466	0,69256	0,69046	0,68835	0,68624	0,68412
47	0,68200	0,67987	0,67773	0,67559	0,67344	0,67129
48	0,66913	0,66697	0,66480	0,66262	0,66044	0,65825
49	0,65606	0,65386	0,65166	0,64945	0,64723	0,64501
50	0,64279	0,64056	0,63832	0,63608	0,63383	0,63158
51	0,62932	0,62706	0,62479	0,62251	0,62024	0,61795
52	0,61566	0,61337	0,61107	0,60876	0,60645	0,60414
53	0,60182	0,59949	0,59716	0,59482	0,59248	0,59014
54	0,58779	0,58543	0,58307	0,58070	0,57833	0,57596
55	0,57358	0,57119	0,56880	0,56641	0,56401	0,56160
56	0,55919	0,55678	0,55436	0,55194	0,54951	0,54708
57	0,54464	0,54220	0,53975	0,53730	0,53484	0,53238
58	0,52992	0,52745	0,52498	0,52250	0,52002	0,51753
59	0,51504	0,51254	0,51004	0,50754	0,50503	0,50252
60	0,50000	0,49748	0,49495	0,49242	0,48989	0,48735
61	0,48481	0,48226	0,47971	0,47716	0,47460	0,47204
62	0,46947	0,46690	0,46433	0,46175	0,45917	0,45658
63	0,45399	0,45140	0,44880	0,44620	0,44359	0,44098
64	0,43837	0,43575	0,43313	0,43051	0,42788	0,42525
65	0,42262	0,41998	0,41734	0,41469	0,41204	0,40939
66	0,40674	0,40408	0,40142	0,39875	0,39608	0,39341
67	0,39073	0,38805	0,38537	0,38268	0,37999	0,37730
68	0,37461	0,37191	0,36921	0,36650	0,36379	0,36108
69	0,35837	0,35565	0,35293	0,35021	0,34748	0,34475
70	0,34202	0,33929	0,33655	0,33381	0,33106	0,32832
71	0,32557	0,32282	0,32006	0,31730	0,31454	0,31178
72	0,30902	0,30625	0,30348	0,30071	0,29793	0,29515
73	0,29237	0,28959	0,28680	0,28402	0,28123	0,27843
74	0,27564	0,27284	0,27004	0,26724	0,26443	0,26163
75	0,25882	0,25601	0,25320	0,25038	0,24756	0,24474
76	0,24192	0,23910	0,23627	0,23345	0,23062	0,22778
77	0,22495	0,22212	0,21928	0,21644	0,21360	0,21076
78	0,20791	0,20507	0,20222	0,19937	0,19652	0,19366
79	0,19081	0,18795	0,18509	0,18224	0,17937	0,17651
80	0,17365	0,17078	0,16792	0,16505	0,16218	0,15931
81	0,15643	0,15356	0,15069	0,14781	0,14493	0,14205
82	0,13917	0,13629	0,13341	0,13053	0,12764	0,12476
83	0,12187	0,11898	0,11609	0,11320	0,11031	0,10742
84	0,10453	0,10164	0,09874	0,09585	0,09295	0,09005
85	0,08716	0,08426	0,08136	0,07846	0,07556	0,07266
86	0,06976	0,06685	0,06395	0,06105	0,05814	0,05524
87	0,05234	0,04943	0,04653	0,04362	0,04071	0,03781
88	0,03490	0,03199	0,02908	0,02618	0,02327	0,02036
89	0,01745	0,01454	0,01164	0,00873	0,00582	0,00291
90	0,00000	-	-	-	-	-

TABELA DE TANGENTES

0° - 45°

<i>minutos</i> <i>graus</i>	0	10	20	30	40	50
0	0,00000	0,00291	0,00582	0,00873	0,01164	0,01455
1	0,01746	0,02036	0,02328	0,02619	0,02910	0,03201
2	0,03492	0,03783	0,04075	0,04366	0,04658	0,04949
3	0,05241	0,05533	0,05824	0,06116	0,06408	0,06700
4	0,06993	0,07285	0,07578	0,07870	0,08163	0,08456
5	0,08749	0,09042	0,09335	0,09629	0,09923	0,10216
6	0,10510	0,10805	0,11099	0,11394	0,11688	0,11983
7	0,12278	0,12574	0,12869	0,13165	0,13461	0,13758
8	0,14054	0,14351	0,14648	0,14945	0,15243	0,15540
9	0,15838	0,16137	0,16435	0,16734	0,17033	0,17333
10	0,17633	0,17933	0,18233	0,18534	0,18835	0,19136
11	0,19438	0,19740	0,20042	0,20345	0,20648	0,20952
12	0,21256	0,21560	0,21864	0,22169	0,22475	0,22781
13	0,23087	0,23393	0,23700	0,24008	0,24316	0,24624
14	0,24933	0,25242	0,25552	0,25862	0,26172	0,26483
15	0,26795	0,27107	0,27419	0,27732	0,28046	0,28360
16	0,28675	0,28990	0,29305	0,29621	0,29938	0,30255
17	0,30573	0,30891	0,31210	0,31530	0,31850	0,32171
18	0,32492	0,32814	0,33136	0,33460	0,33783	0,34108
19	0,34433	0,34758	0,35085	0,35412	0,35740	0,36068
20	0,36397	0,36727	0,37057	0,37388	0,37720	0,38053
21	0,38386	0,38721	0,39055	0,39391	0,39727	0,40065
22	0,40403	0,40741	0,41081	0,41424	0,41763	0,42105
23	0,42447	0,42791	0,43136	0,43481	0,43828	0,44175
24	0,44523	0,44872	0,45222	0,45573	0,45924	0,46277
25	0,46631	0,46985	0,47341	0,47698	0,48055	0,48414
26	0,48773	0,49134	0,49495	0,49858	0,50222	0,50587
27	0,50953	0,51320	0,51688	0,52057	0,52427	0,52798
28	0,53171	0,53545	0,53920	0,54296	0,54673	0,55051
29	0,55431	0,55812	0,56194	0,56577	0,56962	0,57348
30	0,57735	0,58124	0,58513	0,58905	0,59297	0,59691
31	0,60086	0,60483	0,60881	0,61280	0,61681	0,62083
32	0,62487	0,62892	0,63299	0,63707	0,64117	0,64528
33	0,64941	0,65355	0,65771	0,66189	0,66608	0,67028
34	0,67451	0,67875	0,68301	0,68728	0,69157	0,69588
35	0,70021	0,70455	0,70891	0,71329	0,71769	0,72211
36	0,72654	0,73100	0,73547	0,73996	0,74447	0,74900
37	0,75355	0,75812	0,76272	0,76733	0,77196	0,77661
38	0,78129	0,78598	0,79070	0,79544	0,80020	0,80498
39	0,80978	0,81461	0,81946	0,82434	0,82923	0,83415
40	0,83910	0,84407	0,84906	0,85408	0,85912	0,86419
41	0,86929	0,87441	0,87955	0,88473	0,88992	0,89515
42	0,90040	0,90569	0,91099	0,91633	0,92170	0,92709
43	0,93252	0,93797	0,94345	0,94896	0,95451	0,96008
44	0,96569	0,97133	0,97700	0,98270	0,98843	0,99420
45	1,00000	1,00583	1,01170	1,01761	1,02355	1,02952

TABELA DE TANGENTES
45° - 90°

minutos graus	0	10	20	30	40	50
45	1,00000	1,00583	1,01170	1,01761	1,02355	1,02952
46	1,03553	1,04158	1,04766	1,05378	1,05994	1,06613
47	1,07237	1,07864	1,08496	1,09131	1,09770	1,10414
48	1,11061	1,11713	1,12369	1,13029	1,13694	1,14363
49	1,15037	1,15715	1,16398	1,17085	1,17777	1,18474
50	1,19175	1,19882	1,20593	1,21310	1,22031	1,22758
51	1,23490	1,24227	1,24969	1,25717	1,26471	1,27230
52	1,27994	1,28764	1,29541	1,30323	1,31110	1,31904
53	1,32704	1,33511	1,34323	1,35142	1,35968	1,36800
54	1,37638	1,38484	1,39336	1,40195	1,41061	1,41934
55	1,42815	1,43703	1,44598	1,45501	1,46411	1,47330
56	1,48256	1,49190	1,50133	1,51084	1,52043	1,53010
57	1,53987	1,54972	1,55966	1,56969	1,57981	1,59002
58	1,60033	1,61074	1,62125	1,63185	1,64256	1,65337
59	1,66428	1,67530	1,68643	1,69766	1,70901	1,72047
60	1,73205	1,74375	1,75556	1,76749	1,77955	1,79174
61	1,80405	1,81649	1,82906	1,84177	1,85462	1,86760
62	1,88073	1,89400	1,90741	1,92098	1,93470	1,94858
63	1,96261	1,97680	1,99116	2,00569	2,02039	2,03526
64	2,05030	2,06553	2,08094	2,09654	2,11233	2,12832
65	2,14451	2,16090	2,17749	2,19430	2,21132	2,22857
66	2,24604	2,26374	2,28167	2,29984	2,31826	2,33693
67	2,35585	2,37504	2,39449	2,41421	2,43422	2,45451
68	2,47509	2,49597	2,51715	2,53865	2,56046	2,58261
69	2,60509	2,62791	2,65100	2,67462	2,69853	2,72281
70	2,74748	2,77254	2,79802	2,82391	2,85023	2,87700
71	2,90421	2,93189	2,96004	2,98869	3,01783	3,04749
72	3,07768	3,10842	3,13972	3,17159	3,20406	3,23714
73	3,27085	3,30521	3,34023	3,37594	3,41236	3,44951
74	3,48741	3,52609	3,56557	3,60588	3,64705	3,68909
75	3,73205	3,77595	3,82083	3,86671	3,91364	3,96165
76	4,01078	4,06107	4,11256	4,16530	4,21933	4,27471
77	4,33148	4,38969	4,44942	4,51071	4,57363	4,63825
78	4,70463	4,77286	4,84300	4,91516	4,98940	5,06584
79	5,14455	5,22566	5,30928	5,39552	5,48451	5,57638
80	5,67128	5,76937	5,87080	5,97576	6,08444	6,19703
81	6,31375	6,43484	6,56055	6,69116	6,82694	6,96823
82	7,11537	7,26873	7,42871	7,59575	7,77035	7,95302
83	8,14435	8,34496	8,55555	8,77689	9,00983	9,25530
84	9,51436	9,78817	10,07803	10,38540	10,71191	11,05943
85	11,43005	11,82617	12,25051	12,70621	13,19688	13,72674
86	14,30067	14,92442	15,60478	16,34986	17,16934	18,07498
87	19,08114	20,20555	21,47040	22,90377	24,54176	26,43160
88	28,63625	31,24158	34,36777	38,18846	42,96408	49,10388
89	57,28996	68,75009	85,93979	114,58865	171,88540	343,77371
90	-	-	-	-	-	-